УДК 004.9
DOI https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.1.4

Пилип ПРИСТАВКА
доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, Національний авіаційний університет, вул. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, індекс 03058 (chindakor37@gmail.com)

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0360-2459

Ольга ЧОЛИШКІНА
кандидат технічних наук, доцент, директор Існституту комп'ютерно-інформаційних технологій та дизайну, ПрАТ «ВНЗ «Міжрегіональна Академія управління персоналом», вул. Фрометівська 2, Київ, Україна, індекс 03039 (greenhelga5@gmail.com)

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0681-0413

Pylyp PRYSTAVKA
Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, National Aviation University, 1 Liubomyra Huzara str., Kyiv, Ukraine, postal code 03058 (chindakor37@gmail.com)

Olha CHOLYSHKINA
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Director of the Institute of Computer Information Technology and Design, Interregional Academy of personnel management, 2 Frometivska Street, Kyiv, Ukraine, postal code 03039 (greenhelga5@gmail.com)

Бібліографічний опис статті: Приставка П., Чолишкіна О. Піраміда зображень на основі сплайн-моделі у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів. *Інформаційні технології та суспільство*. 2021. Вип. 1. С. 34–42. DOI: https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.1.4

Bibliographic description of the article: Prystavka, P., Cholyshkina, O. (2021). Piramida zobrazhen na osnovi splain-modeli u vyhliadi liniinoi kombinatsii V-splainiv [Pyramid of images based on spline-model in the form of a linear combination of B-splines]. *Informatsiini tekhnolohii ta suspilstvo – Informati on technology and society*, 1, 34–42. DOI: https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.1.4

ПІРАМІДА ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ СПЛАЙН-МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ В-СПЛАЙНІВ

Анотація. *У статті на основі формалізації моделі зображення, як лінійної комбінації В-сплайнів, що є близькою до інтерполяційних, у середньому подано її відповідні явні вигляди та оператори низькочастотної фільтрації та масштабування. Подано згорткові оператори низькочастотної фільтрації ЦЗ на основі сплайн-моделі. Подано оператори масштабування для побудови пірамід зображень, з метою подальшого пошуку особливих точок ЦЗ (sift-подібні методи) Результати досліджень можливо застосовувати в галузі інформаційної технології обробки цифрованих зображень, що отримано за даними аерофотозйомки з камер безпілотного повітряного судна (БПС). При обробці зображень в умовах обмежених технічних ресурсів (операційна пам'ять, тощо) на борту БПС нагальною є потреба мінімізації обчислювальних затрат алгоритму. Основним недоліком існуючих методів обробки є артефакти вихідного зображення, а саме так званий «драбинний ефект», коли пікселі зображення нагадують сходинки. Шляхом вирішення вказаних проблеми може бути побудова моделі цифрового зображення на основі базису фінітних функцій, що близькі за властивостями до властивостей аналогового зображення в спектральній області. Лінійні комбінації В-сплайнів є обчислювальним засобом обробки послідовностей відліків функцій, якому притаманні ряд цінних властивостей: обчислювальна простота, можливість враховувати локальні «особливості» сигналу, згладжувальні властивості та інші.*

Ключові слова: *піраміда зображень, моделі зображення, лінійна комбінація, В-сплайни.*

PYRAMID OF IMAGES BASED ON SPLINE-MODEL IN THE FORM OF A LINEAR COMBINATION OF B-SPLINES

Abstract. *The article is based around the formalization of the image model as a linear combination of B-splines, which is close to interpolation. The authors present, on average, its corresponding explicit aspects and low-frequency filtering and scaling operators. The possibility to obtain digital images scaled to an arbitrary, not necessarily integer, number of times is demonstrated in the article and the corresponding algorithm is provided. The research results can be applied in the field of information technology for digital image processing, obtained from aerial photography from the cameras of unmanned aerial* *vehicles (drons). When processing images in conditions of limited technical resources (RAM, etc.) on board the BPS, there is an urgent need to minimize the computational costs of the algorithm. The main disadvantage of existing processing methods is the artifacts of the original image, namely the so-called "ladder effect", when the pixels of the image resemble steps. By solving these problems can be the construction of a digital image model based on the basis of finite functions that are close in properties to the properties of the analog image in the spectral region. Linear combinations of B-splines are a computational tool for processing sequences of functions, which has a number of valuable properties: computational simplicity, the ability to take into account local "features" of the signal, smoothing properties and others.*

Key words: *image pyramid, image models, linear combination, B-splines.*

Формалізація моделі зображення, як лінійної комбінації *B*-сплайнів. Оскільки за способом реєстрації ЦЗ, дані, що його подають, є усередненими значеннями, при фіксації аналогового зображення має місце наступне. Нехай площина зображення визначається осями T та Q. Крок дискретизації за напрямами T, Q однаковий $h>0$ (за замовченням $h=1$), отже, задано рівномірне розбиття $\Delta_{hh}: t_i = ih$, $q_j = jh$, $i=\overline{0,H-1}$, $j=\overline{0,W-1}$, де H та W – лінійні розміри ЦЗ, що фіксується. Нехай $\phi(t,q)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє $p(t,q)$ – функцію інтенсивність освітлення об'єктів просторової сцени (аналогове зображення). Тоді в силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки $p(t,q)$ та функції відклику буде значення, усереднене в області дискретизації, зокрема:

$$(p*\phi)(ih,jh)=\frac{1}{h^2}\int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}}\int_{jh-\frac{h}{2}}^{jh+\frac{h}{2}} p(t,q)\phi(t-ih,q-jh)dtdq=\bar{p}_{i,j}. \tag{1}$$

Тому дискретизовані значення інтенсивності світлового потоку (цифрове зображення) можна подати у вигляді:

$$p_{i,j}=\bar{p}_{i,j}+\varepsilon_{i,j},\ i=\overline{0,H-1},\ j=\overline{0,W-1}, \tag{2}$$

де $\varepsilon_{i,j}$ – випадкова вада. Стосовно вади $\varepsilon_{i,j}$ можна припускати будь–який розподіл, наприклад Гаусів. Отже, при побудові моделі зображень за даними (1) виникає задача використовувати апроксимації, що враховують і випадкову природу даних, і фізичні властивості систем реєстрації – зокрема, оператори інтерполяційні в середньому або близькі до інтерполяційних у середньому [1].

Традиційно задача моделювання аналогового зображення вирішується так [2; 3]. Якщо дискретизація аналогового зображення проведена раструванням, то ідеальне інтерполяційне відновлення $p(t,q)$ виконується за допомогою двовимірного фільтру з прямокутною частотною характеристикою, отриманої за допомогою зворотного перетворення Фур'є:

$$w(t,q)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cdot\frac{\sin(\pi q)}{\pi q}.$$

Продукт фільтрації може бути визначений за допомогою двовимірної згортки ЦЗ і даної імпульсної характеристики. Після виконання згортки має місце:

$$p(t,q)=\sum_i\sum_j p_{i,j}\frac{\sin(\pi(t-i))}{\pi(t-i)}\cdot\frac{\sin(\pi(q-j))}{\pi(q-j)}.$$

Наведене співвідношення є двовимірним варіантом теореми Котельникова–Найквіста і вказує спосіб точного інтерполяційного відтворення неперервного зображення за відомою послідовністю його двовимірних відліків. Тобто, для точного відновлення в ролі інтерполюючої функції повинні використовуватися двовимірні функції виду $\sin(x)/x$. Наведене твердження є справедливим, якщо двовимірний спектр сигналу є фінітним, а інтервали дискретизації досить малі. Справедливість зроблених висновків порушується, якщо хоча б одна з цих умов не виконується. Реальні зображення рідко мають спектри з яскраво вираженими граничними частотами. Однією з причин, що призводять до необмеженості спектра, є обмеженість розмірів зображення.

Шляхом вирішення вказаної проблеми може бути побудова моделі ЦЗ на основі базису фінітних функцій, що близькі за властивостями до властивостей аналогового зображення в спектральній області. Наприклад, лінійні комбінації *B*–сплайнів [4-8] є обчислювальним засобом обробки послідовностей відліків функцій, якому притаманні ряд цінних властивостей: обчислювальна простота, можливість враховувати локальні «особливості» сигналу, згладжувальні властивості та інші. Тому актуальним може бути розгляд питання про можливість використання згаданих сплайнів на випадок побудови моделі аналогового зображення [1].

У монографії [9] для апроксимації функції $p(t,q)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття $\Delta_{h,h}$, подано лінійні комбінації *B*–сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Наприклад, сплайн–оператори нульового та першого ступеня уточнення на основі *B*–сплайнів другого порядку такі:

$$S_{2,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}p_{i,j}B_{2,h}(t-ih)B_{2,h}(q-jh), \tag{3}$$

$$S_{2,1}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}\left(p_{i,j}-\frac{1}{6}\left(\Delta_i^2 p_{i,j}+\Delta_j^2 p_{i,j}\right)+\frac{1}{36}\Delta_{ij}^2 p_{i,j}\right)B_{2,h}(t-ih)B_{2,h}(q-jh), \tag{4}$$

де (з точністю до аргументу)

$$B_{2,h}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin[-3h/2;3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t\in[-3h/2;-h/2], \\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t\in[-h/2;h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t\in[h/2;3h/2]; \end{cases} \tag{5}$$

$$\Delta_i^2 p_{i,j}=p_{i-1,j}-2p_{i,j}+p_{i+1,j};\ \Delta_j^2 p_{i,j}=p_{i,j-1}-2p_{i,j}+p_{i,j+1};$$

$$\Delta_{ij}^2 p_{i,j}=\Delta_i^2 p_{i,j-1}-2\Delta_i^2 p_{i,j}+\Delta_i^2 p_{i,j+1}=\Delta_j^2 p_{i-1,j}-2\Delta_j^2 p_{i,j}+\Delta_j^2 p_{i+1,j}.$$

Обґрунтуванням обрання розглянутих сплайнів в якості моделі аналогового зображення можуть бути міркування, відповідні тим, що викладені в роботі [10] для моделювання аналогових одновимірних сигналів з кінцевою енергією на основі аналогічних одновимірних лінійних комбінацій *B*–сплайнів. Зокрема, виходячи з положення, що базис *B*–сплайнів є базисом Риса та з того факту, що фундаментальні сплайни на основі *B*–сплайнів [11] прямують до нуля експоненціально швидко при віддалені від локальної (i,j)–ої області наближення, прийнятним є використання введених в роботі [9] двовимірних локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому в якості моделі ЦЗ.

Якщо обрати в якості моделі зображення $p(t,q)$ сплайни (3), (4), то така оцінка за певних умов є фактично асимптотично точною. Зокрема, якщо $p(t,q)\in C^{2,2}$, $\left|\varepsilon_{i,j}\right|<\varepsilon$, $i,j\in Z$ і $\forall\varepsilon>0$, то справедлива оцінка [9] така:

$$\left\|p(t,q)-S_{2,0}(p,t,q)\right\|\le\frac{h^2}{6}\left\|p''_{t^2}(t,q)\right\|+\frac{h^2}{6}\left\|p''_{q^2}(t,q)\right\|+$$
$$+\frac{h^4}{36}\left\|p^{(4)}_{t^2q^2}(t,q)\right\|+\varepsilon\cdot\left\|p(t,q)\right\|+o\left(h^4\right), \tag{6}$$

для $\forall p(t,q)\in C^{3,3}$ і $\forall\varepsilon>0$ справедлива нерівність

$$\left\|p(t,q)-S_{2,1}(p,t,q)\right\|\le\frac{h^3}{12\sqrt{3}}\left\|p'''_{t^3}(t,q)\right\|+\frac{h^3}{12\sqrt{3}}\left\|p'''_{q^3}(t,q)\right\|+$$
$$+\frac{h^6}{432}\left\|p^{(6)}_{t^3q^3}(t,q)\right\|+\varepsilon\cdot\frac{16}{9}\left\|p(t,q)\right\|+o\left(h^6\right) \tag{7}$$

Вираз (4) надає високоточне наближення, а сам сплайн, що уточнює (та інші аналогічні [9]) є операторами близькими до інтерполяційних у середньому в асимптотичному сенсі. Якщо ж в якості апроксимації зображення обрати вираз (3) або будь–яку іншу комбінацію *B*–сплайнів такого типу:

$$S_{r,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}p_{i,j}B_{r,h_t}\left(t-ih_t\right)B_{r,h_q}\left(q-jh_q\right),\ r=2,3,\dots, \tag{8}$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру [12], де, наприклад (з точністю до аргументу)

$$B_{6,h}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin\left[-\frac{7h}{2},\frac{7h}{2}\right],\\ \frac{1}{720}\left(\frac{t}{h}+\frac{7}{2}\right)^6, & t\in\left[-\frac{7h}{2},-\frac{5h}{2}\right],\\ -\frac{1}{120}\left(\frac{t}{h}\right)^6-\frac{7}{60}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{21}{32}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{133}{72}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{329}{128}\left(\frac{t}{h}\right)^2-\frac{1267}{960}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{1379}{7680}, & t\in\left[-\frac{5h}{2},-\frac{3h}{2}\right],\\ \frac{1}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^6+\frac{7}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{21}{64}\left(\frac{t}{h}\right)^4+\frac{35}{288}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{91}{256}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{7}{768}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{7861}{15360}, & t\in\left[-\frac{3h}{2},-\frac{h}{2}\right],\\ -\frac{1}{36}\left(\frac{t}{h}\right)^6+\frac{7}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{77}{192}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{5887}{11520}, & t\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right],\\ \frac{1}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^6-\frac{7}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{21}{64}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{35}{288}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{91}{256}\left(\frac{t}{h}\right)^2-\frac{7}{768}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{7861}{15360}, & t\in\left[\frac{h}{2},\frac{3h}{2}\right],\\ -\frac{1}{120}\left(\frac{t}{h}\right)^6+\frac{7}{60}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{21}{32}\left(\frac{t}{h}\right)^4+\frac{133}{72}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{329}{128}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{1267}{960}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{1379}{7680}, & t\in\left[\frac{3h}{2},\frac{5h}{2}\right],\\ \frac{1}{720}\left(\frac{t}{h}-\frac{7}{2}\right)^6, & t\in\left[\frac{5h}{2},\frac{7h}{2}\right] \end{cases} \quad (9)$$

Зокрема, в роботі [11], приведено доведення, що як і функція Гауса, будь–який *B*–сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ). Отже, якщо $B_r(t)$, $r\geq 2$ – *B*–сплайн порядку r, то [13]:

$$\hat{B}_r(\omega)=\left(\frac{e^{i\omega/2}-e^{-i\omega/2}}{i\omega}\right)^{r+1}=\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^{r+1}.$$

Зазначимо, що вже починаючи з порядку $r=5$ і *B*–сплайн, і гаусіан в частотній області фактично мало чим відрізняються, при цьому обрахунок *B*–сплайну п'ятого порядку [14] потребує менше обчислювальних затрат. Тож, якщо є потреба в отриманні цифрового низькочастотного фільтру ЦЗ, то достатньо в моделі (8) визначити значення сплайну у вузлах розбиття $\Delta_{h,h}$ [15]. Наприклад, якщо ввести заміну

$$x=\frac{2}{h}(t-ih),\ |x|\leq 1,\ y=\frac{2}{h}(q-jh),\ |y|\leq 1, \quad (10)$$

можна подати (3) в розгорнутому вигляді

$$S_{2,0}(p,t,q)=\frac{1}{64}\Big((1-x)^2(1-y)^2p_{i-1,j-1}+(1-x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i-1,j}+$$
$$+(1-x)^2(1+y)^2p_{i-1,j+1}+\left(6-2x^2\right)(1-y)^2p_{i,j-1}+\left(6-2x^2\right)\left(6-2y^2\right)p_{i,j}+$$
$$+\left(6-2x^2\right)(1+y)^2p_{i,j+1}+(1+x)^2(1-y)^2p_{i+1,j-1}+(1+x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i+1,j}+$$
$$+(1+x)^2(1+y)^2p_{i+1,j+1}\Big). \quad (11)$$

Далі, поклавши в (10) $x=0$, $y=0$ отримаємо лінійний оператор $L\left(p^{i,j}\right)$ низькочастотної фільтрації:

$$L\left(p^{i,j}\right)=S_{2,0}(p,ih,jh)=\Big(p_{i-1,j-1}+6p_{i-1,j}+p_{i+1,j+1}+$$
$$+6p_{i,j-1}+36p_{i,j}+6p_{i,j+1}+p_{i+1,j-1}+6p_{i+1,j}+p_{i+1,j+1}\Big)\Big/64,\ i,j\in\mathbb{Z}$$

Використовуючи запис у формі дискретної згортки послідовності $p_{i,j}$, $i,j\in\mathbb{Z}$ з маскою фільтра γ, оператори низькочастотної фільтрації на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів 2-го порядку можна записати так:

$$L\left(p^{i,j}\right)=\sum_{ii=i-1}^{i+1}\sum_{jj=j-1}^{j+1}\gamma^{(r)}_{ii-i,jj-j}p_{ii,jj},\ i,j\in\mathbb{Z},$$

де $r=\{2,3\}$,

$$\gamma^{(2)}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}1 & 6 & 1\\ 6 & 36 & 6\\ 1 & 6 & 1\end{pmatrix}; \quad (12)$$

Використання, наприклад, *B*-сплайну шостого порядку надасть такий оператор:

$$L\left(p^{i,j}\right)=\sum_{ii=i-3}^{i+3}\sum_{jj=j-3}^{j+3}\gamma^{(6)}_{ii-i,jj-j}p_{ii,jj},\ i,j\in\mathbb{Z},$$

$$\gamma^{(6)}=\frac{1}{21233664}\begin{pmatrix}0,01 & 7,22 & 105,43 & 235,48 & \cdots\\ 7,22 & 5212,84 & 76120,46 & 170016,56 & \cdots\\ 105,43 & 76120,46 & 1111548,49 & 2482665,64 & \cdots\\ 235,48 & 170016,56 & 2482665,64 & 5545083,04 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}. \quad (13)$$

Зауважимо, що маска (13) має розміри (7x7), а значення, яких не достає в поданні визначаються з урахуванням симетрії.

Побудова піраміди зображень за використанням лінійних операторів на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів. Моделі зображення з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру на зразок (8) традиційно мають застосування при обробці ЦЗ для реалізації масштабного (кратномаштабного) аналізу та при побудові пірамід зображень в методах, що потребують визначення особливих точок, наприклад, SIFT-подібних методах розпізнавання [16; 17].

Серед різноманітних ядер в зготковій моделі зображення у просторі масштаб-положення найбільше поширення традиційно має гаусова функція. Тож дозволимо собі відступ від введеної моделі на основі лінійної комбінації *B*-сплайнів для викладення відомих положень про використання функцій Гауса при масштабуванні ЦЗ. Отже, простір масштаб-положення для вихідного зображення $p(t,q)$ визначається функцією

$$L(t,q,\sigma)=\int_{(\xi,\eta)}p(t-\xi,q-\eta)G(\xi,\eta,\sigma)d\xi d\eta, \quad (14)$$

яка є згорткою гаусової функції змінного масштабу

$$G(t,q,\sigma)=\frac{1}{2\pi\sigma}\exp\left(-\frac{t^2+q^2}{2\sigma}\right),$$

з функцією інтенсивності освітлення $p(t,q)$:

$$L(t,q,\sigma)=G(t,q,\sigma)*p(t,q),$$

де '*' – це операція згортки по координатам *t* та *q*.

Щоб з обчислювальної точки зору ефективно знаходити стійкі (стабільні) положення ключових точок (t,q,σ) (keypoint locations) в просторі масштаб-положення (scale-space), в роботі [17] екстремуми в просторі масштаб-положення визначаються для $D(t,q,\sigma)$ – згорток різниць гаусових функцій двох ближніх масштабів, розділених постійними множниками *k*, з вихідним зображенням $p(t,q)$:

$$D(t,q,\sigma)=\left(G(t,q,k\sigma)-G(t,q,\sigma)\right)*p(t,q)=L(t,q,k\sigma)-L(t,q,\sigma), \quad (15)$$

Обчислення згортки вихідного зображення з гаусовими функціями (згладжування гаусових зображень) $L(t,q,\sigma)$ (14) необхідно для опису особливостей в просторі масштаб-положення (scale-space feature description). Але після їх визначення згортка $D(t,q,\sigma)$ (15) може бути визначена простим відніманням гаусових зображень (14). Крім цього, різниця гаусових функцій дає замкнену апроксимацію нормованого масштабом лапласіана $\sigma^2\nabla^2 G$:

$$\nabla^2_{norm}L=t\left(L_{xx}+L_{yy}\right) \quad (16)$$

(нормований множник σ^2 потрібен для інваріантності відносно масштабу). Зв'язок між $D(t,q,\sigma)$ (15) і $\sigma^2\nabla^2 G$ випливає з рівняння дифузії

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = \sigma \nabla^2 G. \qquad (17)$$

З (17) бачимо, що $\nabla^2 G$ може бути обрахований з кінцево-різницевої апроксимації похідної $\partial G / \partial \sigma$ при використанні різниці гаусових функцій для з'єднання масштабів $k\sigma$ та σ:

$$\sigma \nabla^2 G = \frac{\partial G}{\partial \sigma} \approx \frac{G(t,q,k\sigma) - G(t,q,\sigma)}{k\sigma - \sigma}$$

і тому

$$G(x,y,k\sigma) - G(x,y,\sigma) \approx (k-1)\sigma^2 \nabla^2 G. \qquad (18)$$

Формула (18) показує, якщо обчислюється різниця гаусових функцій (difference-of-Gaussian function) з масштабами, які відрізняються на постійний множник (фактор) k, ця різниця містить σ^2 – нормування масштабу, необхідне для масштабно інваріантного лапласіана (16). В формулі (18) множник (фактор) $(k-1)$ є константою для усіх масштабів, і відповідно, не впливає на положення екстремумів. Помилка апроксимації прямує до нуля при $k \to 1$, але на практиці виявляється, що ця апроксимація не впливає на стабільність виявлення або локалізації екстремумів, як наприклад $k = \sqrt{2}$.

Обчислюються гаусові зображення, розділені постійним множником (фактором) k в просторі масштаб-положення. Вони показані у вигляді стека у лівому стовбці (рис. 1.2). Кожна октава в просторі масштаб-положення (тобто гаусові зображення до подвоєння варіації) розділена на цілу кількість s інтервалів, тому $k = 2^{1/s}$. В стек для кожної октави поміщуються $(s+3)$ розмитих зображень, тому знаходження кінцевих екстремумів (final extrema detection) охоплює повну октаву. Зображення сусідніх масштабів віднімаються, даючи $(s+1)$ різниці гаусових зображень $D(\cdot)$ (15). Після формування кожної повної октави з $n = 1,2,...$ гаусове зображення $L(t,q,2^n\sigma)$, $n = 1,2,...$, яке має в два рази більшу варіацію ніж вихідне для цієї октави значення $2^{n-1}\sigma$, $n = 1,2,...$ на половину проріджується так, щоб залишався кожний другий піксель в кожному рядку і кожному стовпці. Це відповідає переходу на наступний рівень гаусової піраміди [18].

Якщо ж здійснювати побудову піраміди зображень, модель яких задана у вигляді (8), для зменшення розмірів зображення доцільно використовувати оператори на зразок низькочастотних фільтрів з масками (12) – (13). Нехай задано деякий растр, кожному пікселу якого поставлено у відповідність двійка індексів $\{(i,j)\}_{i,j \in Z}$, що визначають його місцеположення. Не зменшуючи загальності позначимо $\{p_{i,j,0}\}$ для запису обчислювальної схеми при роботі з послідовностями кольорових складових – червоною, зеленою та синьою. Для рекурентного двократного збільшення масштабу (двократного зменшення горизонтального та вертикального розмірів) зображення необхідно на кожному κ–му ($\kappa = 1,2,\ldots$) кроці рекурсії чотирикратно зменшувати кількість пікселів, звільнюючи у новому κ–му растрі місце з під трьох старих пікселів праворуч, зверху та зверху–навскіс від кожного (i,j)–го піксела $(\kappa-1)$–го растру. Тобто, якщо $\{p_{i,j,\kappa}\}_{i,j \in Z}$ – послідовність кольорових складових κ–го зменшеного растру, то

$$p_{i,j,\kappa} = p_{2i,2j,\kappa-1}, \qquad (19)$$

при цьому пам'ять під розміщення величин $p_{2i+1,2j,\kappa-1}$, $p_{2i,2j+1,\kappa-1}$, $p_{2i+1,2j+1,\kappa-1}$, може бути вивільнена.

Окрім тривіального визначення членів послідовності $\{p_{i,j,\kappa}\}_{i,j \in Z}$ згідно виразу (19), реалізують збільшення масштабу зображення зі згладжуванням, контрастуванням, направленою фільтрацією, тощо, залежно від конкретних потреб. В такому разі величини $p_{i,j,\kappa}$ визначаються на підставі деякого лінійного функціоналу $p_{i,j,\kappa} = A\left(p^{\kappa-1,2i,2j}\right)$, $i,j \in Z$, що побудований на даних попереднього кроку рекурсії. Наприклад, зменшення зі згладжуванням за використанням низькочастотного фільтру з маскою (12), може бути реалізовано так:

$$p_{i,j,\kappa} = \frac{1}{64}\Big(p_{2i-1,2j-1,\kappa-1} + 6p_{2i-1,2j,\kappa-1} + p_{2i-1,2j+1,\kappa-1} + 6p_{2i,2j-1,\kappa-1} + 36p_{2i,2j,\kappa-1} +$$
$$+ 6p_{2i,2j+1,\kappa-1} + p_{2i+1,2j-1,\kappa-1} + 6p_{2i+1,2j,\kappa-1} + p_{2i+1,2j+1,\kappa-1}\Big).$$

В загальному випадку при збільшенні масштабу зображення, що описується слайн-моделлю (8) можна подати у наступному вигляді:

$$p_{i,j,\kappa} = \sum_{ii=2i-1}^{2i+1} \sum_{jj=2j-1}^{2j+1} \gamma^{(2)}_{L,ii-2i,jj-2j} p_{ii,jj,\kappa-1}, \tag{20}$$

для операторів з маскою (12) або, як приклад,

$$p_{i,j,\kappa} = \sum_{ii=2i-3}^{2i+3} \sum_{jj=2j-3}^{2j+3} \gamma^{(6)}_{L,ii-2i,jj-2j} p_{ii,jj,\kappa-1}, \tag{21}$$

для оператору з маскою (13).

На рисунку (рис. 1) показано приклад піраміди з чотирьох рівнів ЦЗ, яку отримано після $\kappa = 3$ кроків рекурсії за допомого оператора (21). При обробці ЦЗ використання пірамідальної структури даних забезпечує зменшення часу обробки зображення, низькочастотну фільтрацію для придушення високочастотних осциляцій функції інтенсивності освітлення, а отже отримання глобальних особливостей (особливих точок), що характерні для зображень на усіх рівнях – більш точних початкових наближень особливостей для обробки нижніх рівнів по результатам верхніх рівнів піраміди.

Рис. 1. Піраміда з чотирьох рівнів для тестового зображення

Оператори на зразок (20)-(21) можна застосовувати і для реалізації побудови октави згідно (15). По суті, різниця низькочастотних складових зображення, які отримані за допомогою фільтрації зображення операторими з масками (12)-(13) дає у результаті високочастотну складову зображення. Наприклад, маска оператору на основі різниці низькочастотних фільтрів на основі *B*–сплайнів 3–го та 2–го порядку є такою:

$$\delta L_{3,2} = \gamma^{(3)}_L - \gamma^{(2)}_L = \frac{1}{576}\begin{pmatrix} 7 & 10 & 7 \\ 10 & -68 & 10 \\ 7 & 10 & 7 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Аналогічно, використовуючи фільтри на основі *B*-сплайнів 3, 4, 5 та 6 порядків можна ввести наступні маски:

$$\delta L_{4,3} = \gamma^{(4)}_L - \gamma^{(3)}_L = \frac{1}{147456}\begin{pmatrix} 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \\ 76 & 1680 & 1096 & 1680 & 76 \\ 230 & 1096 & -12636 & 1096 & 230 \\ 76 & 1680 & 1096 & 1680 & 76 \\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \end{pmatrix}; \tag{23}$$

$$\delta L_{5,4} = \gamma^{(5)}_L - \gamma^{(4)}_L = \frac{1}{33177600}\begin{pmatrix} 2079 & 42804 & 100314 & \cdots \\ 42804 & 257904 & 20664 & \cdots \\ 100314 & 20664 & -1866276 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \tag{24}$$

$$\delta L_{6,5} = \gamma^{(6)}_L - \gamma^{(5)}_L = \frac{1}{21233664}\begin{pmatrix} 0{,}01 & 7{,}22 & 105{,}43 & 235{,}48 & \dots \\ 7{,}22 & 3738{,}28 & 37781{,}9 & 72695{,}6 & \dots \\ 105{,}43 & 37781{,}9 & 114745{,}93 & -47679{,}32 & \dots \\ 235{,}48 & 72695{,}6 & -47679{,}32 & -878100{,}32 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Тобто, для побудови піраміди зображень положень ключових точок, операторами, що близькі до (15) можна використати такі вирази:

на основі маски (22)

$$p_{i,j,\kappa} = \sum_{ii=2i-1}^{2i+1} \sum_{jj=2j-1}^{2j+1} \delta L_{3,2} p_{ii,jj,\kappa-1}, \tag{25}$$

на основі масок (23)-(24)

$$p_{i,j,\kappa} = \sum_{ii=2i-2}^{2i+2} \sum_{jj=2j-2}^{2j+2} \delta L_{rr} p_{ii,jj,\kappa-1}, \quad rr = \{"4,3","5,4"\} \tag{26}$$

та за використання маски (25)

$$p_{i,j,\kappa} = \sum_{ii=2i-3}^{2i+3} \sum_{jj=2j-3}^{2j+3} \delta L_{6,5} p_{ii,jj,\kappa-1}. \tag{27}$$

Висновки. За матеріалами проведених досліджень можна сформулювати наступні висновки.

1. Формалізовано модель ЦЗ на основі двовимірних поліноміальних сплайні на основі *B*-сплайнів другого-шостого порядків, що є близькими до інтерполяційних у середньому.

2. Подано згорткові оператори низькочастотної фільтрації ЦЗ на основі сплайн-моделі.

3. Подано оператори масштабування для побудови пірамід зображень, з метою подальшого пошуку особливих точок.

4. Подальші дослідження, можуть мати за мету отримання безпосередньо операторів визначення особливих точок та їх детекторів.

Список використаних джерел:

1. Приставка П.О., Рябий М.О. Модель реалістичних зображень на основі двовимірних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. *Наукоємні технології*. 2012. № 3 (15). С. 67–71.
2. Грузман И.С., Киричук В.С. и др. Цифровая обработка изображений в информационных системах : учебное пособие. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. 168 с.
3. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. М. : Сов. Радио, 1979. 312 с.
4. Schoenberg I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. Quart. Appl. Math. 4, P. 45–99. Part B. ibid 4. 1946. P. 112–141.
5. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы востановления кривых. К. : ИМ НАУ, 1997. 358 с.
6. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М. : Наука, 1984. 351 с.
7. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам, М. : Радио и связь, 1985. 303 с.
8. Приставка П.О. Лінійні комбінації B-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій* : зб. наук. праць. 2011. Т. 15. С. 4–17.
9. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни при обробці даних, Д. : Вид-во Дніпропетр. ут-ту, 2004. 236 с.
10. Приставка П.О. Лінійні комбінації B-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій* : зб. наук. праць. 2011. Т. 15.
11. Чуи Ч. Введение в вэйвлетты, М. : Мир, 2001.
12. Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В. Сплайн-функции и цифровые фильтры / под ред. А.С. Алексеева. Новосибирск : Вычислительный центр СО АН СССР, 1984.
13. Unser M. Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing, IEEE Signal Processing Magazine, 1999. P. 22–38.
14. Приставка П.О. Чолишкіна О.Г. Дослідження B-сплайну п’ятого порядку та їх лінійної комбінації. *Математичне моделювання*. 2007.
15. Приставка П.О. Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій*. 2006. Т. 10. С. 3–14.
16. Lowe D.G. Object recognition from local scale-invariant features. *Computer Vision (ICCV). The proceedings of the seventh IEEE international conference*. 1999. P. 1150–1157.
17. Lowe D. G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*. 2004. V. 60. N 2. P. 91–110.
18. Кухаренко Б.Г. Алгоритмы анализа изображений для определения локальных особенностей и распознавания объектов и панорам. *Информационные технологии*. 2011. № 7. Приложение. 32 с.

References:

1. Prystavka, P.O. and Ryabiy, M.O. (2012). Model of realistic images on the basis of double splines, close to interpolation in the middle. *Science technology*. No. 3 (15), pp 67–71.
2. Gruzman, I.S. and Kirichuk, V.S. et al. (2000). Digital image processing in information systems. Textbook. Novosibirsk: Publishing house of NSTU, 168 p.

3. Yaroslavsky, L.P. (1979). Introduction to digital imaging. Moscow: Sov. Radio, 312 p.

4. Schoenberg, I.J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A. Quart. Appl. Math. 4, pp. 45–99. Part B. ibid 4, pp. 112–141.

5. Ligun, A.A. and Shumeiko, A.A. (1997). Asymptotic methods for restoring curves. Kiev: IM NAU, 358 p

6. Korneichukm, N.P. (1984). Splines in approximation theory. Moscow: Nauka, 351 p.

7. De Bohrm K.A. (1985). Practical Guide to Splines. Moscow: Radio and Communication, 303 p.

8. Prystavka, P.O. (2011). Linear combinations of B-splines, close to interpolation on average, in the problem of analog signal modeling. *Actual problems of automation and information technology*: coll. Science. wash, vol. 15, pp. 4–17.

9. Prystavka, P.O. (2004). Polynomial splines in data processing. Dnipropetrovsk: Dnipropetrovsk Publishing House, 236 p.

10. Prystavka, P.O. (2011). Linear combinations of B-splines, close to interpolation on average, in the problem of modeling analog signals. *Actual problems of automation and information technology* : coll. science. proceedings, vol. 15.

11. Chui, C.K. (2001). Introduction to Wavelets. Moscow: Mir.

12. Vasilenko, V.A., Zyuzin, M.V. and Kovalkov, A.V. (1984) Spline functions and digital filters (edited by A.S. Alekseev). Novosibirsk: Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences.

13. Unser, M. (1999). Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 22–38.

14. Prystavka, P.O., Cholyshkina, O.G. (2007). Fifth-order B-spline study and their linear combination. *Mathematical modeling*.

15. Prystavka, P.O. (2006). Numeric aspects of storing polynomial splines when prompting filters. *Actual problems of automation and information technologies*, vol. 10, pp. 3–14.

16. Lowe, D.G. (1999) Object recognition from local scale-invariant features. *Computer Vision (ICCV). The proceedings of the seventh IEEE international conference,* pp. 1150–1157.

17. Lowe, D.G. (2004). Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, vol. 60, issue 2, pp. 91–110.

18. Kukharenko, B.G. (2011). Image analysis algorithms for determining local features and recognizing objects and panoramas. *Information Technologies*, no. 7, Appendix, 32 p.