УДК 519.8
DOI https://doi.org/10.32689/maup.it.2022.3.5

Дмитро ОЛЬХОВСЬКИЙ
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000 (dmitriy@olhovsky.name)

ORCID: 0000-0003-0313-6977

Олена ОЛЬХОВСЬКА
кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000 (lena@olhovsky.name)

ORCID: 0000-0001-5366-5995

Оксана ЧЕРНЕНКО
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000 (oksanachernenko7@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-9084-0999

Тетяна ПАРФЬОНОВА
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000 (tapa.poltava@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-9343-2061

Юрій ОЛЕКСІЙЧУК
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014 (olexijchuk@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-0585-3307

Оксана ОРІХІВСЬКА
старший викладач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014 (aka.jeita@gmail.com)

ORCID: 0000-0003-2775-0832

Артем ЗАДОРОЖНІЙ
аспірант кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014

Dmytro OLHOVSKIY
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000 (dmitriy@olhovsky.name)

Olena OLKHOVSKA
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000 (lena@olhovsky.name)

Oksana CHERNENKO
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000 (oksanachernenko7@gmail.com)

Tatyana PARFONOVA
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000 (tapa.poltava@gmail.com)

Yuriy OLEKSIYCHUK
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000 (olexijchuk@gmail.com)

Oksana ORIKHIVSKA
Senior lecturer of Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000 (aka.jeita@gmail.com)

Artem ZADOROZNYI
Graduate student of Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000 (lena@olhovsky.name)

Бібліографічний опис статті: Ольховський, Д., Ольховська, О., Черненко, О., Парфьонова, Т., Олексійчук, Ю., Оріхівська, О., Задорожний, А. (2022). Розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на перестановках з обмеженнями на стратегії одного гравця. *Інформаційні технології та суспільство,* 3 (5), 41–48. DOI:

Bibliographic description of the article: Olkhovsky, D., Olkhovska, O., Chernenko, O., Parfyonova, T., Oleksiichuk, Yu., Orikhovska, O., Zadorozhny, A. (2022). Rozviazuvannia zadach kombinatornoi optymizatsii ihrovoho typu na perestanovkakh z obmezhenniamy na stratehii odnoho hravtsia [Solving game-type combinatorial optimization problems on permutations with constraints on the strategies of one player]. *Informatsiini tekhnolohii ta suspilstvo – Information technology and society,* 3(5), 41–48. DOI:

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ІГРОВОГО ТИПУ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА СТРАТЕГІЇ ОДНОГО ГРАВЦЯ

Задачі комбінаторної оптимізації на множині перестановок все частіше зустрічаються на практиці та потребують дослідження і розв'язання, тому постає необхідність розробки нових та модифікації вже існуючих методів для їх розв'язування.

***Мета роботи** – запропонувати нові методи розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на множинах перестановок, побудувати алгоритм розв'язування таких задач. Провести аналіз його складності, зокрема, дати теоретичну оцінку методу.*

***Методологія.** Для створення алгоритму розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на перестановках з обмеженнями на стратегії одного гравця використовувалися методи комбінаторної оптимізації та математичного програмування.*

***Наукова новизна**. У рамках дослідження задач комбінаторної оптимізації ігрового типу було вивчено можливість використання монотонного ітераційного алгоритму для розв'язування даного класу задач на множинах перестановок. У роботі проведено опис алгоритму розробленого монотонного ітераційного методу для пошуку ціни гри для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на множині перестановок з обмеженнями на стратегії одного гравця. Розглянутий монотонний ітераційний алгоритм включає одинадцять кроків і дозволяє знайти ціну гри, заданої матрицею довільної вимірності та множиною пронумерованих перестановок – стратегіями першого гравця.*

Проведено оцінку складності запропонованого алгоритму. Для зручності викладення матеріалу введено необхідні позначення та пояснення. При розрахунку складності алгоритму визначено асимптотичну верхню границю з точністю до постійного множника. Знайдено теоретичну оцінку часу роботи монотонного ітераційного методу. Результати дослідження сформульовано у вигляді теореми з послідовно викладеним обґрунтованим доведенням.

Представлено ілюстративний приклад з метою застосування розробленого алгоритму. Детально розписано розв'язок завдання відповідно до кроків алгоритму. Проведено порівняння отриманого результату з розв'язками за іншими методами, зокрема, шляхом переходу від ігрової задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на множині перестановок до пари двоїстих задач лінійного програмування для матричної гри з платіжною матрицею *та ітераційним методом. Підтверджено коректність отриманих результатів на основі співпадіння відповідей, отриманих трьома різними способами.*

Висновки. *Монотонний ітераційний метод дає змогу швидко отримати значення ціни гри із заданою точністю та оптимальну стратегію першого гравця, причому, як було встановлено, кількість кроків методу слабко залежить від розмірності задачі.*

Розроблений алгоритм монотонного ітераційного методу дозволив провести порівняння результатів з раніше відомими методами для підтвердження їх коректності.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, монотонний ітераційний метод, теоретична оцінка складності методу.*

SOLVING GAME-TYPE COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS ON PERMUTATIONS WITH CONSTRAINTS ON THE STRATEGIES OF ONE PLAYER

Problems of combinatorial optimization for multiple permutations are increasingly encountered in practice and require research and solution, therefore there is a need to develop new and modify existing methods for their solution.

The purpose of the work *is to propose new methods of solving combinatorial optimization problems of the game type on multiple permutations, to build an algorithm for solving such problems. Conduct an analysis of its complexity, in particular, give a theoretical assessment of the method.*

Methodology. *Combinatorial optimization and mathematical programming methods were used to create an algorithm for solving game-type combinatorial optimization problems on permutations with restrictions on the strategies of one player.*

Scientific novelty. *As part of the study of game-type combinatorial optimization problems, the possibility of using a monotone iterative algorithm for solving this class of problems with multiple permutations was studied. The paper describes the algorithm of the developed monotonic iterative method for finding the price of the game for solving problems of combinatorial optimization of the game type on a set of permutations with restrictions on the strategy of one player. The considered monotonic iterative algorithm includes eleven steps and allows finding the price of the game given by a matrix of arbitrary dimension and a set of numbered permutations – the strategies of the first player.*

The complexity of the proposed algorithm was evaluated. For the convenience of presenting the material, the necessary designations and explanations have been introduced. When calculating the complexity of the algorithm, an asymptotic upper bound is determined with accuracy up to a constant factor. A theoretical estimation of the working time of the monotone iterative method was found. The results of the research are formulated in the form of a theorem with a consistently presented substantiated proof.

An illustrative example is presented for the purpose of applying the developed algorithm. The solution of the task is described in detail according to the steps of the algorithm. The obtained result is compared with solutions by other methods, in particular, by moving from the game problem of combinatorial optimization of the game type with multiple permutations to a pair of dual problems of linear programming for a matrix game with a payment matrix and an iterative method. The correctness of the obtained results was confirmed based on the coincidence of the answers obtained in three different ways.

Conclusions. *The monotone iterative method allows us to quickly obtain the value of the price of the game with a given accuracy and the optimal strategy of the first player, and, as it was found, the number of steps of the method depends weakly on the dimension of the problem.*

The developed algorithm of the monotonic iterative method made it possible to compare the results with previously known methods to confirm their correctness.

Key words: *combinatorial optimization, monotonic iterative method, theoretical evaluation of the complexity of the method.*

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими чи практичними завданнями. Задачі комбінаторної оптимізації на комбінаторних множинах все частіше зустрічаються на практиці та потребують дослідження і розв’язування [1-9]. Окремим класом можна виділити задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями, що визначені різними типами комбінаторних конфігурацій. Даний клас задач є доволі новим, а отже потребує розробки нових та дослідження вже існуючих методів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [2] розглянута постановка задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями, що визначені множиною перестановок на стратегії одного гравця. У [3] запропоновано, а у [4] обґрунтовано ітераційний метод розв’язування задач комбінаторної оптимізації. У [5] розглянута оцінка швидкості збіжності даного методу. У роботі [6] проведено порівняння відомих методів розв’язування ігрових задач та наведені числові експерименти.

У даній публікації розглядається алгоритм модифікованого ітераційного методу для розв’язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу та проведена оцінка складності роботи алгоритму.

Постановка завдання. В даній публікації пропонується розглянути алгоритм модифікованого ітераційного методу для розв’язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу та провести оцінку складності його роботи.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для математичної моделі задачі з роботи [2] розглянемо алгоритм її розв’язування, а саме, задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями, що визначені множиною перестановок на стратегії одного гравця. Монотонний ітераційний метод, як ітераційний процес, дозволяє знайти υ – ціну гри Γ_A, що задана матрицею $A' = \left(a'_{ij}\right)$ вимірності $m \times n$ та множиною пронумерованих перестановок $E_{mv}\left(P^x\right)$ – стратегіями першого гравця.

На нульовому кроці перший гравець обирає довільну перестановку

$$x^0 = x_\tau = \left(x^0_{\tau_1}, x^0_{\tau_2}, \ldots, x^0_{\tau_m}\right) \in E_{mv}\left(P^x\right),\ \gamma^0 = \left(0,0,\ldots,0,1,\ldots,0\right),$$

де в γ^0 одиниця стоїть на місці $\tau \in J_L$ номера перестановки x^0 в $E_{mv}\left(P^x\right)$, $L = \left|E_{mv}\left(P^x\right)\right|$. Визначається допоміжний вектор c^0, як вектор скалярних добутків стовпців матриці A' та вектору-перестановки x^0, координати якого зважені координатами γ^0, тобто

$$c^0_j = \sum_{t=1}^{m} \gamma^0_\tau a'_{tj} x^0_{\tau t},\ \forall j \in J_n,\ c^0 = \left(c^0_1, \ldots, c^0_n\right),$$

де $\gamma_i = 1$ – ймовірність використання перестановки $x \quad x$.

Крок 1. Встановлюється початковий номер ітерації N рівний 1, $N = 1$.

Крок 2. Визначається

$$\underline{\upsilon}^{N-1} = \min_{j \in J_n} c^{N-1}_j \qquad (1)$$

та позначається множина індексів

$$J^N = \left\{j^{N-1}_1, \ldots, j^{N-1}_\gamma\right\}, \qquad (2)$$

на яких досягається $\underline{\upsilon}^{N-1}$, тобто $J^N = \arg\min_{j \in J_n} c^{N-1}_j$.

Крок 3. Формується матрична гра $\Gamma^N \subset \Gamma_A$ як підгра гри Γ_A з матрицею $A^N = \left(a^N_{ij}\right)$, де $j \in J^N$, $j \in J^N$.

Крок 4. На основі Γ^N формується матрична $l \times \gamma$ $\left(l \geq \gamma\right)$ гра з матрицею B^N. Для цього визначається множина E^N перестановок x^N, кожна з яких доставляє максимальне на множині перестановок $E_{mv}(P^x)$ значення скалярного добутку стовпців матриці A^N та перестановок з $E_{mv}\left(P^x\right)$. Якщо перестановок, які для певного стовпця матриці A^N дають максимальне значення, декілька, то обираються в E^N всі такі перестановки, $E^N \subset E_{mv}\left(P^x\right)$. Кількість перестановок в E^N при цьому позначається l. Величина l може бути в межах від одного до m! (в гіршому випадку, коли $a'_{ij} = const\ \forall i \in J_m$). Зі значень скалярних добутків стовпців матриці A^N та перестановок E^Nз E^N утворюється матрична гра з матрицею $B^N = \left(b_{ij}\right)^{j=\overline{1,\gamma}}_{i=\overline{1,l}}$, де $b_{ij} = \sum_{t=1}^{m} a^N_{tj} x^N_{it}$, $i \in J_l$, $j \in J^N$, $x^N_i = \left(x^N_{i1}, \ldots, x^N_{im}\right) \in E^N$, де $i \in J_l$. Слід зауважити, що $l = \gamma$, якщо кожне максимальне значення скалярних добутків стовпців з A^N та $x^N_i \in E_{mv}\left(P^x\right)$ досягається тільки на одній перестановці.

Крок 5. Розв'язується гра з матрицею B^N. Визначається $\tilde{\gamma}^N = \left(\tilde{\gamma}^N_1, \ldots, \tilde{\gamma}^N_l\right)$ – ймовірність перестановок $x^N_i = \left(x^N_{i_1}, \ldots, x^N_{i_m}\right)$, $i \in J_l$ що відповідають рядкам матриці B^N.

Крок 6. Визначається вектор $\tilde{c}^N = \left(\tilde{c}^N_1, \ldots, \tilde{c}^N_n\right)$ за формулою:

$$\tilde{c}^N_j = \sum_{i=1}^{l} \tilde{\gamma}^N_i \left(\sum_{t=1}^{m} x^N_{it} a'_{tj}\right),\ \forall j \in J_n. \qquad (3)$$

Крок 7. Розглядається гра з матрицею вимірності 2 x n: $\begin{pmatrix} c^{N-1}_1 \ldots\ c^{N-1}_n \\ \tilde{c}^N_1\ \ldots\ \tilde{c}^N_n \end{pmatrix}$.

Визначається оптимальна стратегія $\left(1-\alpha_N, \alpha_N\right)$, $0 \leq \alpha_N \leq 1$ першого гравця в цій грі. При цьому

$$\alpha_N = \arg\max_{\alpha} \min_{j} \left(\left(1-\alpha\right) c^{N-1}_j + \alpha \tilde{c}^N_j\right). \qquad (4)$$

Крок 8. Якщо $\alpha_N = 0$, то зупинка алгоритму з ціною гри $\underline{\upsilon}^{N-1}$ та ймовірностями застосування стратегій-перестановок, що складають вектор γ^N, інакше – перехід на наступний крок алгоритму.

Крок 9. Обчислюється значення вектору $\gamma^N = \left(\gamma^N_1, \ldots, \gamma^N_L\right)$ за наступною формулою:

$$\gamma^N = \left(1-\alpha_N\right)\gamma^{N-1} + \alpha_N \tilde{\tilde{\gamma}}^N, \qquad (5)$$

де x^N_i – це вектор довжини L, утворений з координат вектора x^N_i, розташованих згідно нумерації перестановок x^N_i в множині $E_{mv}(P^x)$, інші елементи – нулі.

Крок 10. Визначаються компоненти вектору $c^N = \left(c^N_1, \ldots, c^N_n\right)$ за формулою:

$$c^N = \left(1-\alpha_N\right)c^{N-1} + \alpha_N \tilde{c}^N. \qquad (6)$$

Крок 11. Збільшується номер N ітерації на 1, виконується перехід на крок 2 алгоритму.

Оцінка складності алгоритму монотонного ітераційного методу

Для алгоритму монотонного ітераційного методу було проведено оцінку складності. Введемо позначення:

– P_i – кількість перестановок на поточній ітерації i (при виявленні однакових елементів);
– S_i – кількість стратегій, які використовуються на поточній ітерації;
– $O(m\log m)$ – відома складність алгоритму сортування;
– n^3 та S_i^3 – необхідний машинний час для двоїстого симплекс-методу [10; 11].

При розрахунку складності алгоритму потрібно визначити асимптотичну верхню границю з точністю до постійного множника [11]. Для функції $g(n)$ позначка $O(g(n)) = f(n)$ [3] означає множину функцій таких, що існує додатна константа c і n_0 такі, що $0 \le f(n) \le cg(n)$ для всіх $n \ge n_0$.

Підрахуємо: $T = \sum_{i=1}^{61} c_j \tau_j$:

$$T = 1(c_{13} + c_{14} + c_{20} + c_{21} + c_{26} + c_{31} + c_{40} + c_{45}) +$$
$$+m(c_1 + c_2 + c_3 + c_{15} + c_{16} + c_{22} + c_{23} + c_{32} + c_{33} + c_{41} + c_{42}) +$$
$$+n(c_4 + c_5 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12} + c_{34} + c_{35} + c_{43} + c_{44} + c_{46} + c_{47} + c_{48} +$$
$$+c_{49} + c_{50} + c_{51} + c_{52}) + n \cdot m(c_6 + c_7) + S_i \cdot c_{17} + S_i \cdot m \cdot (c_{18} + c_{19}) +$$
$$+P_i \cdot (c_{24} + c_{25} + c_{27} + c_{28} + c_{29} + c_{30}) + P_i \cdot n(c_{36} + c_{37}) + P_i \cdot n \cdot m(c_{38} + c_{39}) +$$
$$+T_0(m) + T_2(n^2) + T_3(S_i^3) + T_1(P_i!) + T_4(n^2) + T_5(n^3) +$$
$$+O(m\log m) + O(m\log m) + O(P_i \log P_i) + T_6(1)$$

або

$$T = O(1) + O(m) + O(n) + O(n \cdot m) + O(S_i) + O(S_i \cdot m) + O(P_i) +$$
$$+O(P_i \cdot n) + O(P_i \cdot n \cdot m) + O(m\log m) + O(m\log m) + O(P_i \log P_i) +$$
$$T = O(1) + O(m) + O(n) + O(n \cdot m) + O(S_i) + O(S_i \cdot m) + O(P_i) + .$$

Враховуючи, що $T_i(f) = O(f)$ приймаємо:

$$T = O(1) + O(m) + O(n) + O(n \cdot m) + O(S_i) + O(S_i \cdot m) + O(P_i) +$$
$$+O(P_i \cdot n) + O(P_i \cdot n \cdot m) + O(m\log m) + O(m\log m) + O(P_i \log P_i) + O(m) +$$
$$+O(P_i!) + O(n^2) + O(S_i^3) + O(n^2) + O(n^3) + O(1).$$

Враховуючи, що $\forall c > 0 : cO(f(n)) = O(f(n))$, маємо

$$T = O(m) + O(n) + O(n \cdot m) + O(S_i) + O(S_i \cdot m) + O(P_i) + O(P_i \cdot n) +$$
$$+O(P_i \cdot n \cdot m) + O(m\log m) + O(P_i \log P_i) + O(P_i!) + O(n^2) + O(S_i^3) + O(n^3).$$

Відомо, що якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$, то $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$ та якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, то $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n))$. З огляду на це складність алгоритму набуде вигляду:

$$T = O(m+n) + O(n \cdot m) + O(S_i + P_i) + O(S_i \cdot m) + O(P_i \cdot n) + O(P_i \cdot n \cdot m) +$$
$$+O(m\log m) + O(P_i \log P_i) + O(P_i!) + O(n^2) + O(S_i^3) + O(n^3) =$$
$$= O(P_i \cdot n \cdot m) + O(m\log m) + O(P_i!) + O(n^3) =$$
$$T = O(P_i \cdot n \cdot m + m\log m + P_i! + n^3) \cdot$$

Тобто маємо:

$$T = O(P_i \cdot n \cdot m + m\log m + P_i! + n^3).$$

Таким чином, доведено теорему:

Теорема. Час роботи монотонного ітераційного методу має оцінку: $T = O(P_i \cdot n \cdot m + m\log m + P_i! + n^3)$.

Ілюстративний приклад

Нехай задана матрична гра 3×3 із платіжною матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ за умовою, що на стратегії першого гравця накладаються комбінаторні обмеження, що визначені перестановками $E_{mv}(P^x)$ з множини $P^x = \{0.1; 0.3; 0.6\}$. Знайти ціну гри ЗКОІТП та ймовірність застосування стратегій-перестановок першим гравцем. Нехай перестановки пронумеровані так: $x_1 = (0.1; 0.3; 0.6)$; $x_2 = (0.1; 0.6; 0.3)$; $x_3 = (0.3; 0.1; 0.6)$; $x_4 = (0.3; 0.6; 0.1)$; $x_5 = (0.6; 0.1; 0.3)$; $x_6 = (0.6; 0.3; 0.1)$, а $L = 3! = 6$.

Крок 0. Перший гравець обирає довільну перестановку $x^0 = (x_1, x_2, x_3) \in E_{mv}(P^x)$. Нехай $x^0 = (0.1; 0.3; 0.6)$, $\gamma^0 = (1; 0; 0; 0; 0; 0)$.

Визначаємо допоміжний вектор c^0, кожен елемент якого c_j^0 це скалярний добуток стовпця j матриці A та перестановки x^0, тобто $c_j^0 = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i$, $\forall j \in J_n$, $c = \left(c_1^0, \dots, c_n^0\right)$. Застосувавши до умови задачі, отримаємо: $c^0 = (3.4; 2.3; 3.0)$.

Крок 1. Встановлюємо номер ітерації N =1.

Крок 2. Визначаємо $\underline{\upsilon}^0$ за (4.1), $\underline{\upsilon}^0 = \min_{j \in J_n} c_j^0 = \min\{3.4; 2.3; 3.0\} = 2.3$ та за (4.2) визначаємо множину індексів J^0, $J^N = \arg\min_{j \in J_n} c_j^{N-1}$, на яких досягається $\underline{\upsilon}^0$, $J^0 = \{2\}$.

Крок 3. Формуємо матричну гру $\Gamma^1 \subset \Gamma_A$ як підгру гри Γ_A з матрицею $A^1 = \left(a_{ij}\right)$, де $i = J_3$, $j \in J^0$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. На основі Γ^N сформуємо матричну $l \times 1$ гру. Для цього визначимо (за теоремою 3.1 з [1]) перестановки E^N, які доставляють максимальне на множині перестановок $E_{mv}(P^x)$ значення скалярного добутку елементів стовпців матриці $A^N = A^1$ та перестановки. Згідно умови задачі $E^1 = \{(0.1; 0.6; 0.3); (0.3; 0.6; 0.1)\}$. Отримаємо матрицю B^1, яка на поточній ітерації складається з двох рядків: $B^1 = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 2.6 \end{pmatrix}$.

Крок 5. Розв'язавши матричну гру з отриманою матрицею B^1, визначимо оптимальну стратегію. У нашому випадку отримано розв'язок $\tilde{\gamma}^1 = (0,1)$, відповідно до якого оптимальною стратегією є $x_1^1 = (0.3; 0.6; 0.1)$.

Крок 6. За (3), визначаємо вектор $\tilde{c}^1 = \left(\tilde{c}_1^1, \dots, \tilde{c}_n^1\right)$, тобто:

$\tilde{c}_1^1 = 1 \cdot (0.3 \cdot 1 + 0.6 \cdot 5 + 0.1 \cdot 3) = 3.6$, $\tilde{c}_3^1 = 1 \cdot (0.3 \cdot 3 + 0.6 \cdot 1 + 0.1 \cdot 4) = 1.9$, $\tilde{c}_3^1 = 1 \cdot (0.3 \cdot 3 + 0.6 \cdot 1 + 0.1 \cdot 4) = 1.9$,

таким чином $\tilde{c}^1 = (3.6; 2.6; 1.9)$.

Крок 7. Розглянемо гру з матрицею $\begin{bmatrix} c_1^{N-1} \dots c_n^{N-1} \\ \tilde{c}_1^N \dots \tilde{c}_n^N \end{bmatrix}$ вимірності $2 \times n$:

$$\begin{bmatrix} c^0 \\ \tilde{c}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 & 2.3 & 3 \\ 3.6 & 2.6 & 1.9 \end{bmatrix}.$$

Розв'язавши цю матричну гру, отримаємо оптимальну стратегію першого гравця $(0.5; 0.5)$. При цьому в ролі α_1 обираємо значення, яке задовольняє (4). Тобто $\alpha_1 = 0.5$.

Крок 8. $\alpha_1 \neq 0$, тому переходимо на наступний крок алгоритму.

Крок 9. Обчислюємо значення вектору $\gamma^N = \left(\gamma_1^N, \dots, \gamma_L^N\right)$ за (5), маємо:

$$\gamma^1 = (1 - 0.5)(1; 0; 0; 0; 0; 0) + 0.5(0; 0; 0; 1; 0; 0) = (0.5; 0; 0; 0.5; 0; 0).$$

Крок 10. Визначаємо компоненти вектору $c^1 = \left(c_1^1, \dots, c_n^1\right)$ за (6), отримаємо:

$$c^1 = (1 - 0.5)(3.4; 2.3; 3) + 0.5(3.6; 2.6; 1.9) = (3.5; 2.45; 2.45).$$

Крок 11. Збільшуємо номер N ітерації на 1, переходимо на крок 2 алгоритму.

Крок 2. Визначаємо $\underline{\upsilon}^1$ як $\underline{\upsilon}^1 = \min_{j \in J_n}(3.5; 2.45; 2.45) = 2.45$. Визначаємо множину індексів J^1, на яких досягається $\underline{\upsilon}^1$, $J^1 = \{2; 3\}$.

Крок 3. Формуємо матричну гру $\Gamma^2 \subset \Gamma_A$ як підгру гри Γ_A з матрицею $A^2 = \left(a_{ij^2}\right)$, де $i = J_m$, $j^1 \in J^1$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Для знаходження вектору $\tilde{x}^2$ визначаємо перестановки, що складають множину $E^2 = \{(0.1; 0.6; 0.3); (0.3; 0.6; 0.1); (0.3; 0.1; 0.6)\}$. Сформуємо матрицю B^2 матричної гри:

Крок 5. Розв'язавши отриману на попередньому кроці гру з матрицею B^2, визначимо перестановки $\tilde{x}_1^2 = (0.1; 0.6; 0.3)$ та $\tilde{x}_2^2 = (0.3; 0.1; 0.6)$, що відповідають визначеній стратегії $\tilde{\gamma}^2 = (0.72, 0, 0.28)$.

Крок 6. Визначаємо вектор $\tilde{c}^2$ за (3). Тобто $\tilde{c}^2 = (3.61; 2.46; 2.46)$.

Крок 7. Складемо гру з матрицею вимірності $2 \times n$:

$$\begin{bmatrix} c^1 \\ \tilde{c}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.45 & 2.45 \\ 3.61 & 2.46 & 2.46 \end{bmatrix}.$$

Розв'язавши дану гру знайдено оптимальну стратегію $(0; 1)$ першого гравця в цій грі. При цьому α_2 обираємо за (4). Отримали $\alpha_2 = 1$.

Крок 8. $\alpha_2 \neq 0$, тому переходимо на наступний крок алгоритму.

Крок 9. Обчислюємо значення вектору $\gamma^N = \left(\gamma_1^N, \ldots, \gamma_L^N\right)$ за (5), маємо:

$$\gamma^2 = 1(0; 0.72; 0.28; 0; 0; 0) = (0; 0.72; 0.28; 0; 0; 0).$$

Крок 10. Визначаємо компоненти вектору $c^2 = \left(c_1^2, \ldots, c_n^2\right)$ за (4.6), отримаємо:

$$c^2 = 1 \cdot (3.61; 2.46; 2.46) = (3.61; 2.46; 2.46).$$

Крок 11. Збільшуємо номер $\underline{\upsilon}^2$ ітерації на 1, переходимо на крок 2 алгоритму.

Крок 2. Визначаємо $\underline{\upsilon}^2$ як $\underline{\upsilon}^2 = \min\limits_{j \in J_n}(3.61; 2.46; 2.46) = 2.46$. Визначаємо множину індексів J^2, на яких досягається $\underline{\upsilon}^2$, $J^2 = \{2;3\}$.

Крок 3. Формуємо матричну гру $\Gamma^3 \subset \Gamma_A$ як підгру гри Γ_A з матрицею $A^3 = \left(a_{ij^3}\right)$, де $i = J_m$, $j^2 \in J^2$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Для знаходження вектору $\tilde{x}^3$ визначаємо перестановки, що складають множину $E^3 = \{(0.1; 0.6; 0.3); (0.3; 0.6; 0.1); (0.3; 0.1; 0.6)\}$. Сформуємо матрицю B^3 матричної гри:

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2.6 & 2.1 \\ 2.6 & 1.9 \\ 2.1 & 3.4 \end{pmatrix}.$$

Крок 5. Розв'язавши отриману на попередньому кроці гру з матрицею B^3, визначимо перестановки $\tilde{x}_1^3 = (0.1; 0.6; 0.3)$ та $\tilde{x}_2^3 = (0.3; 0.1; 0.6)$, що відповідають визначеній стратегії $\tilde{\gamma}^3 = (0.72, 0, 0.28)$.

Крок 6. Визначаємо вектор $\tilde{c}^3$ за (3). Тобто $\tilde{c}^3 = (3.61; 2.46; 2.46)$.

Крок 7. Складемо гру з матрицею вимірності $2 \times n$:

$$\begin{bmatrix} c^2 \\ \tilde{c}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.61 & 2.46 & 2.46 \\ 3.61 & 2.46 & 2.46 \end{bmatrix}.$$

Розв'язавши дану гру знайдено оптимальну стратегію $(1;0)$ першого гравця в цій грі. При цьому α_3 обираємо за (4.4). Отримали $\alpha_3 = 0$. Оскільки виконався критерій зупинки алгоритму ($\alpha_3 = 0$), то вихід з алгоритму з ціною гри $\underline{\upsilon}^3 = \upsilon = 2.46$ та ймовірністю використання стратегії $(0.3; 0.1; 0.6)$, рівної 0,28 та стратегії $(0.1; 0.6; 0.3)$, рівної 0,72.

Цю задачу було розв'язано також двома відомими методами: шляхом переходу від ігрової задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на множині перестановок до пари двоїстих задач лінійного програмування для матричної гри з платіжною матрицею та ітераційним методом з [6]. Знайдені значення ціни гри в обох методах збіглися із отриманим значенням при розв'язку задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на множині перестановок запропонованим монотонний ітераційний метод, що підтверджує коректність отриманих результатів.

Висновки з даного дослідження та перспективи подальших розвідок у даному напрямі. У публікації на основі монотонного алгоритму розроблено монотонний ітераційний метод пошуку ціни гри для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на множині перестановок з обмеженнями на стратегії одного гравця. Запропонований монотонний ітераційний метод дає змогу швидко отримати значення ціни гри із заданою точністю та оптимальну мішану стратегію першого гравця, причому кількість кроків методу слабко залежить від вимірності задачі. Також одержано теоретичну оцінку складності запропонованого монотонного ітераційного методу.

У подальшому доцільно застосувати даний алгоритм для розв'язування практичних задач економічного характеру, що зводяться до задач комбінаторної оптимізації та розв'язуються зазначеним методом.

Список використаних джерел:

1. Стоян Ю. Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К. : ІСДО, 1993. 188 с.

2. Емец О. А., Устьян Н. Ю. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа. *Кибернетика и сист. анализ.* 2007. № 6. С. 103-114.

3. Ємець О. О., Устьян Н.Ю. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на перестановках. *Наукові вісті НТУУ «КПІ».* 2008. № 3. С. 5-10.

4. Емец О. А., Ольховская Е.В. Доказательство сходимости итерационного метода решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях. *Кибернетика и сист. анализ.* 2013. № 1. С. 102-114.

5. Ольховська О. В. Оцінка швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач ігрового типу. *Таврійський вісник інформатики і математики*. 2014. № 1. С. 31-42.

6. Емец О. А., Ольховський Д. М., Ольховская Е. В. Сравнение методов решения игровых задач: числовые эксперименты. *Искусственный интеллект*. 2014. №1. С. 47-56.

7. Ємець О.О., Черненко О.О., Чілікіна Т. В., Ольховська О. В. Огляд задач комбінаторної оптимізації визначення рентабельності сільськогосподарського виробництва та методи їх розв'язування. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки*. Випуск 22. 2021. С. 63-74.

8. Ольховський Д., Ольховська О., Черненко О., Парфьонова Т., Чілікіна Т. Програмний комплекс для розв'язування евклідових комбінаторних оптимізаційних задач точними та наближеними методами. *Інформаційні технології та суспільство,* (2 (4). 2022. С. 78-87.

9. Юрій Олексійчук, Дмитро Ольховський, Олена Ольховська, Тетяна Чілікіна, Оксана Черненко, Оксана Оріхівська. Комбінаторна задача про побудову мостів та методи її розв'язання. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. Кременчук : КРНУ, 2022. Випуск 1(132). С. 115-122.

10. Brown G.W. Iterative solution of games by fictitious play. *Activity analysis of production and allocation: Proceedings of a Conference*. 1951. New York. P. 374-376.

11. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е изд. / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.

References:

1. Stoyan, Yu. G., Yemets, O.O. (1993). *Teoriia i metody evklidovoi kombinatornoi optymizatsii [Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization].* К. : Institute for Systems Research in Education [in Ukrainian].

2. Emets O. A., Ustyan N. Yu. (2007). Yssledovanye matematycheskykh modelei y metodov reshenyia zadach na perestanovkakh yhrovoho typa [Study of mathematical models and methods for solving problems on permutations of the game type]. *Kibernetika i sistemnyj analiz – Cybernetics and systems analysis*. No. 6. P. 103-114 [in Russian].

3. Yemets O.O., Ustyan N. Yu. (2008) Odyn iteratsiinyi metod rozviazuvannia ihrovykh zadach na perestanovkakh [One iterative method of solving game problems on permutations]. *Naukovi visti NTUU "KPI". Scientific news of NTUU "KPI"*. No. 3. P. 5-10 [in Ukrainian].

4. Emets O. A., Olkhovskaya E. V. (2013). Dokazatelstvo skhodymosty yteratsyonnoho metoda reshenyia zadachy kombynatornoi optymyzatsyy yhrovoho typa na razmeshchenyiakh [Proof of the convergence of the iterative method of solving the problem of combinatorial optimization of the game type on placements]. *Kibernetika i sistemnyj analiz – Cybernetics and systems analysis.* No. 1. P. 102-114 [in Russian].

5. O. V. Olkhovska (2014). Otsinka shvydkosti zbizhnosti iteratsiinoho metodu rozviazuvannia kombinatornykh optymizatsiinykh zadach ihrovoho typu [Evaluation of the speed of convergence of the iterative method of solving combinatorial optimization problems of the game type]. *Tavriiskyi visnyk informatyky i matematyky – Tavriyskyi Bulletin of Informatics and Mathematics*. No. 1. P. 31-42 [in Ukrainian].

6. Emets O. A., Olkhovsky D. M., Olkhovskaya E. V. (2014). Sravnenye metodov reshenyia yhrovыkh zadach: chyslovыe эksperymentы [Comparison of game problem solving methods: numerical experiments]. *Yskusstvennыi yntellekt - Artificial intelligence*. No. 1. P. 47-56 [in Russian].

7. Iemets, O.O., Chernenko, O.O., Chilikina, T.V., Olkhovska, O.V. (2021). Ohliad zadach kombinatornoi optymizatsii vyznachennia rentabelnosti silskohospodarskoho vyrobnytstva ta metody yikh rozviazuvannia. [Review of combinatorial optimization problems for determining the profitability of agricultural production and methods for solving them]. *Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky – Mathematical and computer modeling. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 22, 63-74 [in Ukrainian].

8. Olkhovskyi D., Olkhovska O., Chernenko O., Parfyonova T., Chilikina T. (2022). Prohramnyi kompleks dlia rozviazuvannia evklidovykh kombinatornykh optymizatsiinykh zadach tochnymy ta nablyzhenymy metodamy [Software complex for solving Euclidean combinatorial optimization problems by exact and approximate methods]. *Informatsiini tekhnolohii ta suspilstvo – Information technologies and society*, 2 (4), P. 78-87 [in Ukrainian].

9. Yurii Oleksiichuk, Dmytro Olkhovskyi, Olena Olkhovska, Tetiana Chilikina, Oksana Chernenko, Oksana Orihivska (2022). Kombinatorna zadacha pro pobudovu mostiv ta metody yii rozviazannia [The combinatorial problem of building bridges and methods of its solution]. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhaila Ostrohradskoho – Bulletin of Mykhailo Ostrogradsky National University of Kremenchug.* – Kremenchuk: KRNU. Issue 1(132). P. 115-122 [in Ukrainian].

10. Brown G.W. (1951). Iterative solution of games by fictitious play. *Activity analysis of production and allocation: Proceedings of a Conference*. New York. P. 374-376 [in English].

11. Kormen T., Leiserson C., Rivest R., Shtein K. (2005). Alhorytmы: postroenye y analyz [Algorithms: construction and analysis], 2nd ed. M. : Williams. 1296 p. [in Russian].