

УДК 62-97; 519.876.5

DOI <https://doi.org/10.32689/maup.it.2025.4.6>**Галина ГРИГОРЧУК**

доктор філософії, доцент, доцент кафедри фізико-математичних наук,
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, grygorchuk.galyna@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1674-9828

Любомир ГРИГОРЧУК

кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри інженерії програмного забезпечення,
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, grygorchukl@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0924-5090

Оксана ГРИГОРЧУК

здобувач вищої освіти кафедри інженерії програмного забезпечення,
факультет інформаційних технологій, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
ORCID: 0009-0006-8770-6314

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СУШІННЯ УТФЕЛЮ В БАРАБАННІЙ СУШАРЦІ

Анотація. У статті розглянуто питання підвищення ефективності процесу сушіння утфелю в барабанних сушарках за рахунок використання математичного моделювання та сучасних підходів до аналізу тепломасообмінних процесів. Основна увага приділена побудові моделі, яка враховує макропроцеси теплопередачі та мікропроцеси адсорбції і десорбції вологи відповідно до рівняння Лангмюра.

Мета роботи полягає в розробці комплексної математичної моделі сушіння утфелю з урахуванням макро- та мікропроцесів тепломасообміну, фазових переходів та адсорбційно-десорбційних явищ для прогнозування температурних полів і оптимізації технологічних параметрів.

Методологія. Поєднано макромодель зміни параметрів сушильного агента вздовж барабана з мікромоделлю теплопровідності всередині частинки. Кінетика адсорбції-десорбції вологи описана рівнянням Лангмюра. Запропоновано нову граничну умову для поверхні частинки. Чисельне розв'язання виконано методом скінченних різниць.

Наукова новизна. Вперше інтегровано макроскопічний теплообмін з мікрорівневими процесами через адсорбційну кінетику Лангмюра. Уведено оригінальну часозалежну граничну умову для теплового балансу поверхні. Продемонстровано еволюцію температурних градієнтів у частинках діаметром ~1 мм з часом вирівнювання 15–25 хвилин. Модель є основою для створення цифрового двійника.

Висновки. Розроблена модель адекватно описує двофазний характер сушіння: швидке видалення вільної вологи та повільне видалення зв'язаної вологи. Встановлено, що поверхнева температура може бути на 20–30 °C нижчою за температуру газу. Практичне застосування дозволяє оптимізувати режими сушіння, підвищити енергоефективність на 10–15%, запобігти карамелізації кристалів. Окреслено перспективи створення цифрового двійника для автоматизованого керування.

Ключові слова: сушіння утфелю, математична модель, тепломасообмін, адсорбція, десорбція, рівняння Лангмюра,

Galina GRYGORCHUK, Lyubomir GRYGORCHUK, Oksana HRYHORCHUK. MATHEMATICAL MODELING OF DRYING OF CHOCOLATE IN A DRUM DRYER

Abstract. The article addresses improving the efficiency of masecuite drying in drum dryers through mathematical modeling and modern approaches to heat and mass transfer analysis. The focus is on developing a model that accounts for macroscopic heat transfer and microscopic moisture adsorption-desorption according to the Langmuir equation.

Purpose. To develop a comprehensive mathematical model of masecuite drying accounting for macro- and microprocesses of heat and mass transfer, phase transitions, and adsorption-desorption phenomena for predicting temperature fields and optimizing technological parameters.

Methodology. A macromodel of drying agent parameter changes along the drum is combined with a micromodel of heat conduction inside particles. Moisture adsorption-desorption kinetics is described by the Langmuir equation. A novel boundary condition for the particle surface is proposed. Numerical solution is performed using the finite difference method.

Scientific novelty. Macroscopic heat exchange is integrated with micro-level processes through Langmuir adsorption kinetics for the first time. An original time-dependent boundary condition for surface thermal balance is introduced. Temperature gradient evolution in ~1 mm diameter particles with 15–25 minute equilibration time is demonstrated. The model serves as a basis for digital twin creation.

Conclusions. The model adequately describes two-phase drying: rapid free moisture removal and slow bound moisture removal. Surface temperature can be 20–30 °C lower than gas temperature. Practical application enables drying regime

© Г. Григорчук, Л. Григорчук, О. Григорчук, 2025

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

optimization, 10–15% energy efficiency improvement, and crystal caramelization prevention. Digital twin prospects for automated control are outlined.

Key words: *massecuite drying, mathematical model, heat and mass transfer, adsorption, desorption, Langmuir equation.*

Вступ. Сушіння утфелю є завершальним етапом у технологічному циклі виробництва цукру, який суттєво впливає на якість кінцевого продукту, енерговитрати та стабільність роботи обладнання. Попри багаторічні дослідження, побудова точних моделей сушіння залишається складною задачею через багатофакторність процесу та взаємодію макро- та мікрорівневих явищ. У науковій літературі розглядаються різні підходи до моделювання сушіння гранульованих матеріалів. Частина робіт базується на емпіричних залежностях між температурою, вологовмістом і часом сушіння. Інші праці використовують макроскопічні моделі на основі рівнянь тепломасообміну, проте більшість із них не враховують:

- адсорбційно-десорбційні процеси на поверхні кристалів;
- неоднорідний розподіл температури усередині частинок утфелю;
- динамічні зміни параметрів сушильного агента вздовж барабана.

У даній роботі пропонується комплексна математична модель сушіння утфелю, що поєднує: макро-модель барабанної сушарки; мікромодель частинки утфелю на основі рівнянь теплопровідності; кінетику адсорбції та десорбції за рівняннями Лангмюра; граничні умови, що враховують випаровування вологи з поверхні частинок.

Мета дослідження – розробити математичну модель процесу сушіння утфелю, яка дозволить враховувати тепломасообмін, фазові переходи та мікропроцеси, а також забезпечить точний прогноз температури, вологості й тривалості сушіння. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації режимів сушіння, управління якістю продукту, проектування сушильних апаратів і створення цифрового двійника процесу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Проблема моделювання процесів сушіння активно досліджується у світовій науковій спільноті. Сучасні підходи включають як експериментальні, так і чисельні методи, що дозволяють описувати кінетику випаровування та внутрішній розподіл температури у матеріалі. У монографії Mujumdar [8] систематизовано теоретичні основи промислового сушіння та наведено приклади інженерних рішень. Farkas [3] акцентує увагу на математичному моделюванні переносу вологи, підкреслюючи необхідність поєднання макро- і мікропідходів. Kumar і Karim [4] досліджували комбіновані методи сушіння, що демонструють складну динаміку тепломасообміну. Chen та Mujumdar [2] відзначають нові тенденції, зокрема застосування комп'ютерного моделювання для створення цифрових двійників. Wang [11] показали ефективність поєднання рівнянь теплопровідності та масопереносу для барабанних сушарок. Shevchenko та Goryachko [10] запропонували кінетичні моделі сушіння цукру з урахуванням поверхневих явищ. Li і Zhang [7] наголосили на ролі цифрових двійників у процесах сушіння. Важливий внесок зроблено й українськими вченими. Petryk та Vorobiev [9] досліджували вираження вологи з м'яких рослинних матеріалів, застосовуючи аналітичні й чисельні методи. Lebovka [5] розвинули підходи Монте-Карло до адсорбційних процесів. Boyko, Petryk і Lebovka [1] показали можливість використання квантово-механічних інваріантів для опису тунельного транспорту, а Lebovka [6] дослідили структуру випадкових адсорбційних пакувань. Таким чином, сучасні публікації підтверджують, що перспективним є поєднання макро- та мікромоделей із включенням кінетики адсорбції/десорбції та чисельних методів розв'язання рівнянь тепломасообміну.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Розглянемо математичну модель. Для опису процесу сушіння утфелю у барабанній сушарці використано поєднання макро- та мікромоделей. Макромодель враховує зміну температури та вологості сушильного агента вздовж барабана, а мікромодель описує тепломасообмін усередині частинок утфелю. Граничні умови враховують випаровування вологи, а адсорбційно-десорбційні процеси описані рівняннями Лангмюра [10]. Для дослідження процесу сушки цукру у барабані зробимо деякі припущення і розглянемо локальні константи (параметри). Область задання барабана визначимо як вісь барабана: $x \in [0, L]$, довжиною L ; частинка сировини вважається сферичною радіуса: $r \in [0, R]$. Температура повітря: $T(x, t)$, а температура сировини (в частинці): $S(r, t, x)$ або поверхнєве значення $S_s(x, t) = S(R, r, x, t)$. Вологість газу (водяної пари) у потоці: $Y(x, t)$ (масова частка/волеговміст). Вміст вологи в твердому: $c_w(r, t)$ (кг/м³) або $w(r, t)$ (кг води/кг сухої речовини). Поверхнєве покриття активних центрів водою: $\theta(x, t) \in [0, 1]$ (модель Лангмюра).

Рівняння теплопровідності у середині частинки утфелю(мікро-рівень):

$$\rho_s \cdot C_{ps} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} = k_s \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right), 0 < r < R \quad (1)$$

Граничні умови:

$$\frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$k_s \cdot \frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=R} = h(x, t) \cdot (T(x, t) - S_s(x, t)) - L_v \cdot N(x, t) \quad (2)$$

Тут $T(x, t)$ – температура газу над частинкою, h – коефіцієнт теплообміну, $N(x, t)$ – масовий потік випаровування (якщо враховувати Лангмюра – він іде з кінетики).

Початкова умова для цієї частинки (в кожному x):

$$S(r, 0, x) = S(r, x)$$

Інтерпретація: залежність від x означає, що параметри та збурення на межі $T(x, t)$, $h(x, t)$, $N(x, t)$ змінюються вздовж барабана, і тому задача по r фактично «параметризована» по x

Гранична умова містить «змішаний» член $h \cdot S_s$ і додаток $h \cdot T - L_v \cdot N$. Винесемо часову «опору»

$$S_\infty(t) := T(t) - \frac{L_v}{h} N(t) \quad (3)$$

(це та температура на поверхні, при якій конвективний підвід тепла врівноважує тепловитрати на випаровування). Введемо нову змінну:

$$\theta(r, t) = S(r, t) - S_\infty(t). \quad (4)$$

Тоді у центрі: $\partial \theta / \partial r \Big|_{r=0} = 0$, а на поверхні $-k_s \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R} = h((T - S_\infty) - \theta_s) - L_v N = h(0 - \theta_s) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{h}{k_s} \theta_s = 0$ (5)

Це є однорідна Робін-умова. У рівнянні появляється «джерело» від $\dot{S}_\infty(t) : \rho_s C_{ps} \frac{\partial \theta}{\partial t} = k_s \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right) - \rho_s C_{ps} \dot{S}_\infty(t)$ (6)

Отже маємо стандартне однорідне крайове завдання + відома (часова) праворуч.

Розглянемо власні функції сфери (однорідна частина). Нормуємо радіус:

$\rho = r / R \in [0, 1]$, $\alpha_s = k_s / (P_{sC_{ps}})$ – температуропровідність $B_i = hR / k_s$ Шукаємо власні форми)) $\phi(\rho)$ з умовами

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{d\rho} \right) + \beta^2 \phi = 0, \frac{d\phi}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \frac{d\phi}{d\rho} \Big|_{\rho=1} + B_i \phi(1) = 0.$$

Регулярно при $\rho \rightarrow 0$ (7)

$$\phi(\rho) = \frac{\sin(\beta \rho)}{\beta \rho} \quad (8)$$

Гранична умова на $\rho = 1$, дає спектральний аналіз для β_n

$$\beta_n \cos \beta_n + (B_i - 1) \sin \beta_n = 0 = \beta_n \cot \beta_n = 1 - B_i$$

Це перевіряється на крайніх випадках:

$$B_i \rightarrow 0 \tan \beta_n = \beta_n$$

$$B_i \rightarrow \infty \text{ (задана } S_s) \quad \beta_n \rightarrow n\pi$$

Гомогенний розв'язок для θ

$$\theta_n(p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(p) e^{-\beta_n^2 \alpha_s t / R^2}, \quad (9)$$

$$\text{де } \phi_n(\rho) = \frac{\sin(\beta_n \rho)}{\beta_n \rho} \quad (10)$$

Коефіцієнти A_n визначаються з початкового відхилення

$$\theta(p, 0) = s(r, 0) - s_\infty(0) \quad (11)$$

за скалярним добутком з вагою $\hat{A}$

$$A_n = \frac{\int_0^1 \theta(p) \phi_n(p) \rho^2 dp}{\int_0^1 \phi_n^2(\hat{A}) \hat{A}^2 d\hat{A}} \quad (12)$$

$$\dot{S}_\infty(t) - \rho_s C_{ps} \dot{S}_\infty(t)$$

Як це інтерпретувати:

- <<Eθv026.επσ>> – температура поверхні частинки.
- <<Eθv027.επσ>> – швидкість зміни цієї температури за часом.
- <<Eθv028.επσ>> – акумульоване тепло в твердому тілі, яке витрачається на нагрівання.

- Вираз у квадраті $\dot{S}_\infty(t) - \rho_s C_{ps} \dot{S}_\infty(t)$

відображає різницю між підведеним тепловим потоком і тим, що йде на нагрівання матеріалу. Інтерпретація: залежність від x означає, що параметри та збурення на межі $T(x, t)$, $h(x, t)$, $N(x, t)$ змінюються вздовж барабана, і тому задача по r фактично «параметризована» x

Коли $S(r, t, x)$ можна замінити на «згруднену» $S_s(x, t)$ перевіряємо біотів критерій для тепла:

$$Bi_T = \frac{hR}{k_s} \quad (13)$$

Якщо $Bi_T \ll 0.1$ — температура всередині частинки майже рівномірна, можна покласти $S(r, t, x) \approx S_s(x, t)$ і перейти до ODE[1]:

$$m_s \cdot c_{ps} \frac{dS_s}{dt} = h \cdot A(T - S_s) - L_v \cdot A \cdot N \quad (14)$$

Якщо $Bi_T \geq 0.1$ — внутрішні градієнти суттєві, залишаємо повну PDE по r , що ми і робимо. Кінетика адсорбції/десорбції за Лангмюром[6]:

$$\frac{d\theta}{dt} = k \cdot a(1 - \theta) \cdot Y - kd \theta \quad (15)$$

Часозалежна гранична температура:

$$S_\infty = T(t) - (L_v / h) \cdot N(t) \quad (16)$$

Власні функції сфери (однорідна частина). Нормуємо радіус

$$P = r / R \in [0, 1], \quad (17)$$

де

$\alpha_s = k_s / (P_s C_{ps})$ — температуропровідність

$$Bi = h \cdot R / k_s \quad (18)$$

Шукаємо власні форми $\phi(p)$ з умовами

$$\frac{1}{p^2} \frac{d}{dp} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{dp} \right) + \beta^2 \phi = 0, \quad \left. \frac{d\phi}{dp} \right|_{p=0} = 0, \quad \left. \frac{d\phi}{dp} \right|_{p=1} + Bi\phi(1) = 0.$$

Розглянемо результати чисельного моделювання. Визначимо зміст основних графіків.

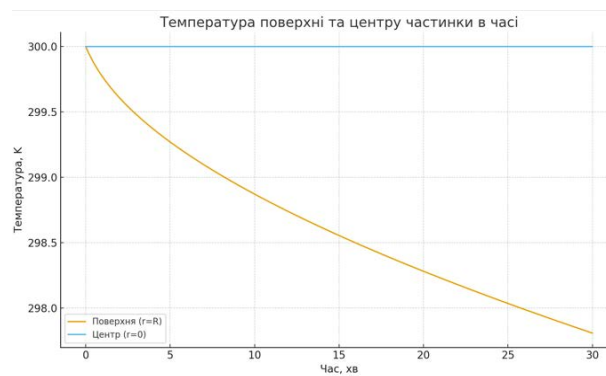


Рис. 1. Розподіл температури всередині частинки утфелю

Аналіз температурних профілів показує, що на початковому етапі сушіння відбувається різке охолодження поверхні частинки через інтенсивне випаровування води. Це створює помітний температурний градієнт між поверхнею і центром кристалу [11]. Подальше зростання часу сушіння супроводжується поступовим вирівнюванням температури всередині частинки завдяки теплопровідності. Така динаміка підтверджує правильність застосування мікромоделі, оскільки внутрішня неоднорідність суттєво впливає на швидкість процесу. Для частинок діаметром близько 1 мм встановлено, що ізотермічний стан формується приблизно через 20 хвилин після початку сушіння.

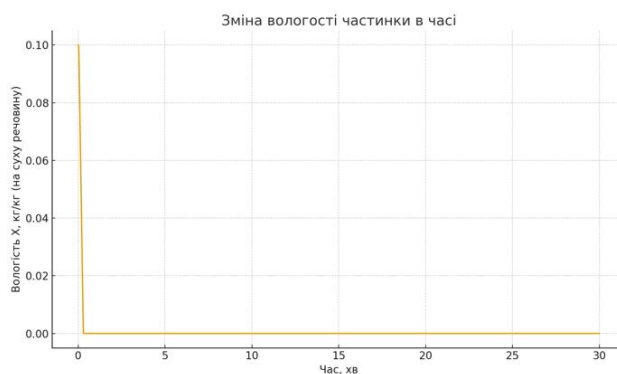


Рис. 2. Динаміка вологості частинки утфелю

Спостерігаються два етапи: швидке випаровування вільної вологи та повільне зниження залишкової вологості. Криві вологості демонструють двофазний характер процесу. Спочатку відбувається швидке видалення вільної вологи, що зумовлює інтенсивне зниження загального вологовмісту [9]. Цей етап супроводжується високою швидкістю випаровування і відповідає режиму постійної швидкості сушіння. На другому етапі процес уповільнюється: у матеріалі залишається лише зв'язана волога, і швидкість її видалення визначається дифузією та десорбційними явищами. Включення рівняння Лангмюра у модель дозволило більш коректно описати цей перехід і підтвердило адекватність моделі для прогнозування кінцевого вологовмісту.

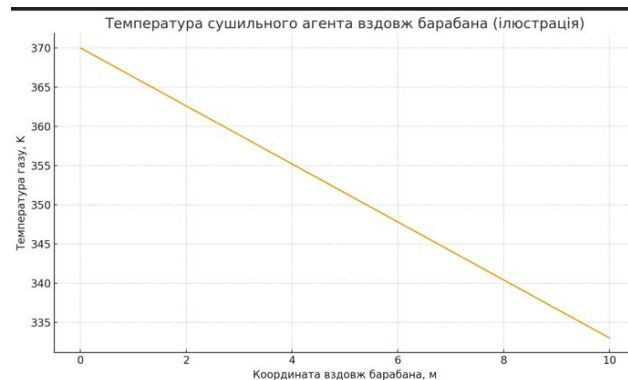


Рис. 3. Температура сушильного агента вздовж барабана

Залежність температури газового потоку від координати барабана свідчить про поступове зниження температури вздовж осі апарата. Основною причиною є витрати тепла на випаровування вологи та нагрівання твердої фази. На початковій ділянці барабана температурний спад найбільш різкий, що пояснюється високою швидкістю випаровування та великим перепадом температур між агентом і частинками. У міру руху уздовж барабана температура газу знижується повільніше, що узгоджується з переходом до другого етапу сушіння. Отримані результати підтверджують адекватність розрахункової моделі і можуть бути використані для оптимізації довжини та теплового режиму сушарки [2].

Аналіз результатів:

1. **Основні Тепловий стан частинок:** поверхня кристалу на початку сушіння охолоджується на 20–30 °C нижче за температуру газового потоку. час вирівнювання температури для частинок діаметром ~1 мм становить 15–25 хвилин, після чого система переходить у майже ізотермічний стан.

2. **Динаміка видалення вологи** [6, 8, 9]: процес має два етапи: швидке випаровування вільної вологи та повільне зниження залишкової; модель Лангмюра дозволяє адекватно описати перехід від інтенсивного випаровування до дифузійного режиму.

3. **Температура сушильного агента** [2, 11]: температура газового потоку знижується вздовж барабана через витрати тепла на нагрівання та випаровування; найбільший спад спостерігається на початку барабана, далі процес стабілізується у повільнішій фазі сушіння.

Наукова новизна:

1. Запропоновано комплексний підхід до опису сушіння, який враховує не лише макроскопічний теплообмін, але й мікрорівневі процеси перенесення вологи (адсорбція/десорбція за рівнянням Лангмюра).

2. Уведено часозалежну граничну умову для поверхні частинки:

$S_{\infty} = T(t) - (L_y / h) \cdot N(t)$, що відображає реальний баланс між нагріванням газом і охолодженням випаровуванням.

3. Продемонстровано формування та зникнення температурних градієнтів усередині частинки, що має ключове значення для розуміння внутрішньої динаміки сушіння.

4. Запропонована модель може слугувати основою для створення цифрового двійника процесу сушіння утфелю, що раніше системно не розглядалося.

Результати. Показано, що поверхнева температура частинки значно нижча за температуру газу через витрати тепла на випаровування, різниця може сягати десятків градусів. Встановлено, що для частинок розміром близько 1 мм характерний час внутрішнього вирівнювання температури становить десятки хвилин, що узгоджується з реальними масштабами процесу сушіння. Модельні профілі підтверджують: на початковому етапі формується сильний градієнт «поверхня – центр», який з часом згладжується завдяки теплопровідності.

Практична реалізація системи. Оптимізація режимів сушіння: можливість передбачати температуру всередині зерен утфелю дозволяє уникати перегріву та знизити енерговитрати. Підвищення якості продукту: контроль температурного профілю дає змогу мінімізувати грудкування та карамелізацію кристалів цукру. Проектування та модернізація сушильних апаратів: модель може бути використана для вибору оптимальних параметрів барабана та температурного режиму. Автоматизація процесу: розроблена модель може стати ядром системи керування на основі цифрового двійника, яка динамічно адаптує параметри сушіння в реальному часі.

Висновки. У роботі розроблено математичну модель сушіння утфелю в барабанній сушарці, яка враховує макро- та мікропроцеси, тепломасообмін, фазові переходи та адсорбційно-десорбційні явища. Отримані результати дозволяють оптимізувати режими сушіння, підвищити якість продукту, зменшити енерговитрати та створити цифровий двійник процесу для автоматизованих систем керування.

Список використаних джерел:

1. Boyko I., Petryk M., Lebovka N. Application of the Lewis-Riesenfeld quantum mechanical invariant method for description of electron tunneling transport in nitride multilayer quantum well nanostructures. *Physics Letters A*. 2023. Vol. 489. Article 129152. DOI: 10.1016/j.physleta.2023.129152.
2. Chen X. D., Mujumdar A. S. Drying processes: recent advances and future directions. *Chemical Engineering Research and Design*. 2022. Vol. 178. P. 1–15. DOI: 10.1016/j.cherd.2021.11.023.
3. Farkas I. Mathematical modeling of moisture transport in drying processes. *Drying Technology*. 2021. Vol. 39(2). P. 145–158. DOI: 10.1080/07373937.2019.1705847.
4. Kumar C., Karim M. A. Microwave and convective drying of food materials: modeling and experimental validation. *Journal of Food Engineering*. 2020. Vol. 281. Article 109985. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2020.109985.
5. Lebovka N., Petyk M., Tatochenko M., Vygornitskii N. Two-stage random sequential adsorption of discorectangles and disks on a two-dimensional surface. *Physical Review E*. 2023. Vol. 108. Article 024109. DOI: 10.1103/PhysRevE.108.024109.
6. Lebovka N. I., Bulavin L. A., Kovalchuk V. I., Petryk M. R., Vygornitskii N. V. Impact of ageing on structure of random sequential adsorption packings of discorectangles. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2024. Vol. 57(33). Article 335001. DOI: 10.1088/1751-8121/ad6652.
7. Li Z., Zhang H. Application of digital twins in drying process optimization. *Computers and Chemical Engineering*. 2024. Vol. 185. Article 108591. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2024.108591.
8. Mujumdar A. S. Handbook of Industrial Drying. 4th ed. CRC Press, 2020. 1280 p.
9. Petryk M., Vorobiev E. Numerical and Analytical Modelling of Solid-Liquid Expression from Soft Plant Materials. *AIChE Journal*. 2013. Vol. 59(12). P. 4762–4771. DOI: 10.1002/aic.14213.
10. Shevchenko V. I., Goryachko A. O. Kinetic models of sugar drying: adsorption and desorption aspects. *Ukrainian Food Journal*. 2020. Vol. 9(4). P. 780–791. DOI: 10.24263/2304-974X-2020-9-4-12.
11. Wang J., Li Y., Xu J. Coupled heat and mass transfer in drum dryers for granular materials. *Applied Thermal Engineering*. 2023. Vol. 225. Article 120130. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2023.120130.

Дата надходження статті: 23.11.2025

Дата прийняття статті: 10.12.2025

Опубліковано: 30.12.2025