УДК 330.4+519.22/.25

И. В. СТЕПАХНО
Л. И. КУБУШКА
В. З. ТАБАКОВ
Межрегиональная Академия управления персоналом, г. Киев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ С ЦЕЛЬЮ ЕКОНОМИИ ЗАТРАТ

Наукові праці МАУП, 2015, вип. 47(4), с. 72–74

Разработка статистических методов в экономике очень часто требует получения объективной информации для выбора способа прогнозирования ситуации. Можно на практическом примере судовождения при реализации маневра показать преимущества использования некоторых вероятностных подходов.

При создании математических (или имитационных) моделей сложных технических, экономических, информационных и других систем очень часто конструируется возможность управления (прогнозирования) поведением системы путем влияния на основные, “узловые” ее показатели. Поскольку на практике входные данные приводятся с искажениями, имеющими вероятностный характер, то приходится заниматься исследованием оценивания поведения некоторых функций от таких “узловых” характеристик, но уже в следующем построении.

Пусть X_i, $i=\overline{1,S}$ — независимые наблюдения над случайной матрицей А + Ξ, где А = (a_{ij}) — вещественная матрица, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, Ξ = (ξ_{ij}) — случайная матрица той же размерности.

Обозначим через λ_k сингулярные собственные числа матрицы А, а через $\hat{\lambda}_k$ — сингулярные собственные числа матрицы $\hat{A}=S^{-1}\sum_{i=1}^{S}X_i$. Очевидно, что если элементы матрицы Ξ независимы и имеют нулевые средние и дисперсии $S^{-1}\sigma^2$, то элементы матрицы $\hat{A}$ также независимы и имеют дисперсии $\sigma^2 S^{-2}$.

Будем считать, что числа m, σ^2 и S зависимы и удовлетворяют следующим условиям:

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\sigma^2 S^{-1}n<\infty,\ \overline{\lim}_{m\to\infty}\sigma^2 S^{-1}m<\infty,$$
$$\overline{\lim}_{m\to\infty}mn^{-1}<1,\ \underline{\lim}_{m\to\infty}mn^{-1}>0. \tag{1}$$

Пусть $\lambda_k(A)\le C<\infty$, $k=1,2,\ldots$
и $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_m$. (2)

Рассмотрим сингулярные спектральные функции:

$$\hat{\mu}_m(x)=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\chi\left(\hat{\lambda}_k<x\right),$$

где $\begin{cases} 1, \text{если } \hat{\lambda}_k < x, \\ 0, \text{если } \hat{\lambda}_k \geq x, \end{cases}$

то есть индикатор события $\{\hat{\lambda}_k < x\}$.

$\hat{\lambda}_k$ — корни характеристического уравнения $\det\left(I\lambda - \sqrt{\hat{A}'\hat{A}}\right) = 0$;

$\hat{\mu}_m(x)$ — это ступенчатая функция, имеющая положительные скачки величиной m^{-1} в точках $x = \hat{\lambda}_k$, то есть это эмпирическая функция распределения.

$\hat{\mu}_m(x)$ сложно выражается через элементы матрицы $\hat{A}$, точные формулы до сих пор неизвестны (так как в силу теоремы Абеля — для корней полиномов степени 5 и выше нет точных формул, выражающихся в виде рациональных функций через коэффициенты полинома). Поэтому непосредственно находить асимптотическое выражение для $\hat{\mu}_m(x)$ очень сложно и не представляется возможным. Удобным инструментом для изучения асимптотического поведения $\hat{\mu}_m(x)$ является преобразование Стилтьеса. Для такой функции $\hat{\mu}_m(x)$ интеграл Стилтьеса вычисляется в явном виде:

$$\hat{b}_m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - z)^{-1} d$$

$$\hat{\mu}_m(x) = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\hat{\lambda}_k - z}, \qquad (3)$$

где $z = e_1 + ie_2$, $e_2 \neq 0$.

Но выражение справа есть не что иное, как $m^{-1}\, Sp\,(-Iz + \hat{A}'\hat{A})^{-1}$.

Таким образом, задача свелась к исследованию асимптотического поведения следов обратных случайных матриц.

Выражение $(-Iz + \hat{A}'\hat{A})^{-1}$ называется резольвентой матрицы $\hat{A}'\hat{A}$.

Очевидно, что матрица $\hat{A}$ распределена так же, как и матрица $A + \Xi$, где Ξ — случайная матрица с независимыми элементами. Значит, вектор-столбцы матрицы $\hat{A}'$ стохастически независимы. Матрица $\hat{A}'\hat{A}$ — матрица Грама. Для нее доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия (1) и (2), а также пусть случайные элементы ξ_{ij} матрицы Ξ для каждого n независимы, $M\xi_{ij} = 0$, $D\xi_{ij} = \sigma^2 S^{-1}$.

Тогда

$$\operatorname{plim}_{m\to\infty} m^{-1} Sp\left[\left(-Iz + \hat{A}'\hat{A}\right)^{-1} - M\left(-Iz + \hat{A}'\hat{A}\right)^{-1}\right] = 0.$$

Доказательство основывается на стандартных формулах возмущений для резольвент матриц [1].

Существует масса прикладных задач в жизни общества, в которых без использования построения моделей трудно или почти невозможно без ошибок просчитать множество экономических показателей.

Рассмотрим одну из возможных ситуаций, в которой из-за неправильного управления или незнания происходят нежелательные затраты.

Экономичное обслуживание речных и морских судов, а также портов является актуальной задачей, для решения которой необходимо применять научный метод математической статистики. Кроме того, правильность принятия решений по графикам обслуживания и эксплуатации позволяет сэкономить средства и обеспечить безопасность хождения кораблей. Рассматривая данные статистики по аварийности, становится понятным, что жизненный цикл оборудования имеет определенные временные и пространственные ограничения. Многомерность экономических и технических показателей каждой эксплуатируемой единицы усложняет интуитивное оценивание ситуации в каждом конкретном случае. Самые ответственные решения необходимо обосновывать, и прогноз поведения сложных технических систем часто зависит от вероятностных погрешностей.

Предлагаемые ранее модели проигрывания различных ситуаций часто не в состоянии учесть большое количество характеристик, которые могут меняться еще и в зависимости от сложности природных условий эксплуатации. Проводить множество испытаний экономически невыгодно, и параметры характеристик поступают с искажениями. Становится понятным, что применение многомерного статистического анализа в данных условиях позволяет учесть все приведенные выше трудности. Только при помощи вероятностно-статистических приемов можно оценить важность ключевых характеристик, изменяющих конечный результат при выполнении поставленных задач эксплуатации. Метод главных компонент позволяет отбросить или не учитывать те показатели, которые не являются существенными, и сосредоточить все действия по управлению на узловых. Чтобы избежать крупных материальных потерь, предлагается провести статистическую обработку большого количества наблюдений, поступающих во времени с учетом вероятностных ошибок в рамках допущенных ограничений. Чаще всего вероятностное распределение погрешностей при наблюдениях за показателями как раз и укладывается в те допустимые теоретические ограничения, что приведены в вышеизложенной теореме.

Для более точной идентификации предлагаемой математико-статистической модели необходимо собрать всю информацию, поступающую в разные моменты жизненных циклов судов, и записать ее в соответствующую матрицу. Эта информация должна учитываться постоянно в процессе эксплуатации судна и использоваться в обновляемой модели для прогнозирования планируемых маневров.

Следовательно, точная обработка исходных данных с помощью методов многомерного статистического анализа (МСА) позволяет корректировать параметры математико-статистической модели для максимального соответствия полученных с ее помощью исследуемых маневренных характеристик. А это, в свою очередь, позволит не только уменьшить материальные затраты, но и осуществлять качественный прогноз исследуемых практически экономических процессов.

Литература

1. *Гирко В. Л., Степахно И. В.* G-оценка сингулярных собственных чисел матриц / В. Л. Гирко, И. В. Степахно // Доклад АН УССР. — 1990. — № 8. — Сер. А. — С. 14–17.

Представлен метод статистического анализа, введено понятие идентификации и рассчитаны коэффициенты влияния параметров модели на определяемые значения маневренных и экономических характеристик судна.

Проаналізовано метод статистичного аналізу, введено поняття ідентифікації та розраховано коефіцієнти впливу параметрів моделі значення маневрених та економічних характеристик судна, що визначаються.

Given the method of statistical analysis , the notion of identity and influence coefficients calculated model parameters determined by the value and economic maneuvering characteristics of the vessel.

Надійшла 27 листопада 2015 р.