УДК 519.652:519.254 (045)
DOI https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.2.3

Пилип ПРИСТАВКА
доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, Національний авіаційний університет, вул. Любомира Гузара 1, Київ, Україна, індекс 03058 (chindakor37@gmail.com)

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0360-2459

Ольга ЧОЛИШКІНА
кандидат технічних наук, доцент, директор, Інститут комп'ютерно-інформаційних технологій та дизайну, ПрАТ «ВНЗ «Міжрегіональна Академія управління персоналом», вул. Фрометівська 2, Київ, Україна, індекс 03039 (greenhelga5@gmail.com)

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0681-0413

Pylyp PRYSTAVKA
Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, National Aviation University, 1 Liubomyra Huzara Street, Kyiv, Ukraine, postal code 03058 (chindakor37@gmail.com)

Olha CHOLYSHKINA
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Director, Institute of Computer Information Technology and Design, Interregional Academy of personnel management, 2 Frometivska Street, Kyiv, Ukraine, postal code 03039 (greenhelga5@gmail.com)

Бібліографічний опис статті: Приставка П., Чолишкіна О. Часткові випадки локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому другого та третього порядків. *Інформаційні технології та суспільство*. 2021. Вип. 2. С. 26–33. DOI: https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.2.3

Bibliographic description of the article: Prystavka, P., Cholyshkina, O. (2021). Chastkovi vypadky lokalnykh polinomialnykh splainiv, blyzkykh do interpoliatsiinykh u serednomu druhoho ta tretoho poriadkiv [Partial cases of local polynomial splines close to interpolations in the middle of the second and third orders]. *Informatsiini tekhnolohii ta suspilstvo – Information technology and society*, 2, 26–33. DOI: https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.2.3

ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ЛОКАЛЬНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ

Анотація. *Розглянуто задачі цифрової обробки сигналів та послідовностей. Для даного типу задач отримано лінійні оператори, які є частковими випадками локальних поліноміальних сплайнів другого порядку першого та другого ступеня уточнення та третього порядку першого ступеня уточнення, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Отримані в статті формули можуть мати застосування при програмуванні, коли критичним є час обробки великих масивів даних. Також коли є потреба в оптимізації розрахунків в режимі реального часу. В статті наведено приклад застосування при реалізації обчислювальних процедур небінарного subdivision.*
Ключові слова: *локальні поліноміальні сплайни, subdivision-метод, оптимізація розрахунків.*

PARTIAL CASES OF LOCAL POLYNOMIAL SPLINES CLOSE TO INTERPOLATIONS IN THE MIDDLE OF THE SECOND AND THIRD ORDERS

Abstract. *The problems of digital signal processing and sequences are considered. For this type of problems, linear operators are obtained, which are partial cases of local polynomial splines of the second order of the first and second degree of refinement and the third order of the first degree of refinement, which are close to interpolation on average. The formulas obtained in the paper can be used in programming when the processing time of large data sets is critical. Also when there is a need to optimize calculations in real time. The paper gives an example of the application of non-binary subdivision in the implementation of computational procedures.*
Key words: *local polynomial splines, subdivision method, calculation optimization.*

Постановка проблеми. На сьогодні задачі обробки цифрових сигналів, зображень та відео характеризуються, в першу чергу, великим обсягом даних, що за вимогою мають оброблятись в режимі реального часу. Найвищу швидкодію серед методів, що забезпечують операції фільтрації, масштабування, стиснення та які реалізуються при автоматизації розрахунків, показують ті, в основу яких покладено використання лінійних операторів, як таких, що мають найменшу обчислювальну складність. По суті застосування таких операторів являє собою дискретну згортку цифрової послідовності з симетричною або несиметричною маскою, коефіцієнти якої часто отримані, як частковий випадок деякого неперервного наближення. Наприклад, часткові випадки гаусіана та лапсасіана використовують в задачі субполосної фільтрації, відповідно, як низько- та високочастотні фільтри [1].

Зростання обсягів інформації при обробці цифрових сигналів характеризується не просто формальним збільшенням кількості даних, а ще й зміною їх властивостей. Зокрема, при обробці цифрових фотографій спостерігається тенденція до збільшення розрішення систем фіксації, що може вимагати збільшення ширини масок операторів згортки. Тож актуальним є дослідження методів апроксимації, що мають високі апроксимативні властивості та низьку обчислювальну складність водночас, задля отримання на їх основі нових лінійних операторів для цифрової обробки сигналів.

Аналіз досліджень та постановка задачі. Однією із поширених задач при обробці одновимірних цифрових послідовностей є кратне або некратне їх масштабування. Дана операція поширена при стисненні сигналів, виділення інформативних складових або при дослідженні локальних особливостей. Варто окремо звернути увагу на дві близькі, але все ж таки різні за суттю області обробки, що базуються з одного боку на методах кратно масштабного аналізу (КМА) [2], а з другого – *subdivision*-методи [3]. При багатьох точках дотику цих двох обчислювальних технологій можливим є відзначити, що в більшості випадків процедури КМА базуються на операторах, що згладжують, а процедури *subdivision* – на операторах, що близькі до інтерполяційних.

Якщо говорити про наближення, близькі до інтерполяційних, то з точки зору якості неперервних апроксимацій функцій, заданих послідовностями відліків у вузлових точках, з урахуванням вимоги низької обчислювальної складності відповідних процедур, позиції лідера займають методи, засновані на використанні лінійних комбінацій *B*-сплайнів [4–8]. В роботі [9] обґрунтовано лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому в якості моделі цифрових сигналів з кінцевою енергією, показано можливість їх реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових сигналі, в тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Вперше такі сплайни на основі *B*-сплайнів другого порядку були введені в роботах А.О. Лигуна та В.В. Кармазиної [10]. Обчислювальний аспект їх затосування в задачі бінарного *subdivision* подано в роботах [8; 11]. Частковий випадок прикладу застосування уточнюючого локального сплайну на основі B-сплайнів другого порядку в задачі не бінарного *subdivision* наведено в роботі [12].

Поставимо за мету даної роботи отримати часткові випадки локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів другого та третього порядків, що можуть мати застосування при розробці автоматизованих систем обробки цифрових сигналів та послідовностей.

Виклад основного матеріалу. Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$. Будемо вважати, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла

$$\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)dt ,$$

при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах будемо визначати

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i , \; i \in Z ,$$

де ε_i – похибка.

Згідно роботи [7] уточнюючі сплайни на основі *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, що найчастіше мають використання в практичній діяльності, такі:

$$S_{2,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i\right)B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

$$S_{2,2}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i + \frac{1}{36}\Delta^4 p_i\right)B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

$$S_{3,1}(p,t)=\sum_{i\in Z}\left(p_i-\frac{5}{24}\Delta^2 p_i\right)B_{3,h}(t-ih),$$

де

$$\Delta^{2u}p_i=\Delta^{2u-2}p_{i+1}-2\Delta^{2u-2}p_i+\Delta^{2u-2}p_{i-1},\ u=1,2,\dots,$$

$B_{r,h}(t)$, $r=2,3,4$ – B-сплайн, що з точністю до аргументу визначається так:

$$B_{2,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-3h/2;3h/2],\\ (3+2t/h)^2/8, & t\in[-3h/2;-h/2],\\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t\in[-h/2;h/2],\\ (3-2t/h)^2/8, & t\in[h/2;3h/2];\end{cases}$$

$$B_{3,h}(t)=\frac{1}{48}\begin{cases}0, & t\notin[-2h;2h],\\ (4+2t/h)^3, & t\in[-2h;-h],\\ -3(2t/h)^3-12(2t/h)^2+32, & t\in[-h;0],\\ 3(2t/h)^3-12(2t/h)^2+32, & t\in[0;h],\\ (4-2t/h)^3, & t\in[h_t;2h].\end{cases}$$

Наведені сплайни мають високі апроксимативні властивості. Зокрема щодо норм сплайн-операторів справедливі наступні ствердження [7]:

$$\|S_{2,1}(p,t)\|=\frac{4}{3}\|p(t)\|,\ \|S_{2,2}(p,t)\|=\frac{3}{2}\|p(t)\|,\ \|S_{3,1}(p,t)\|=\frac{41}{32}\|p(t)\|,$$

де

$$\|S_{r,u}(p,t)\|=\sup_{|\varepsilon_i|}\max_t|S_{r,u}(\varepsilon,t)|,$$

$$|\varepsilon_i|<\varepsilon,\ i\in Z.$$

Зауважимо, що значення норми оператора $S_{r,u}(p,t)$ – це величина, яка характеризує в скільки разів може зрости похибка при відтворенні функції за допомогою сплайну, якщо значення p_i задані з похибкою.

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,u}(\bar{p},t)$, $r=2,3$, $u=1,2$ свідчать наступні оцінки [7].

При $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^3$ буде вірно наступне

$$\|p(t)-S_{2,u}(\bar{p},t)\|=\frac{h^3}{12\sqrt{3}}\|p^{(3)}(t)\|+o(h^3),\ u=1,2,$$

і для довільної функції $p(t)\in C^4$ справедливо

$$\|p(t)-S_{3,1}(\bar{p},t)\|=\frac{1221h^4}{2880}\|p^{(4)}(t)\|+o(h^4),$$

Подання зазначених сплайнів у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів не зовсім зручне для реалізації в обчислювальному середовищі, тож якщо ввести заміну

$$x=\frac{2}{h}(t-(i+0{,}5)h),\ |x|\le 1,\ \text{при}\ r=2$$

та

$$x=\frac{2}{h}(t-ih),\ |x|\le 1,\ \text{при}\ r=3,$$

то сплайни $S_{r,u}(p,t)$, $r=2,3$, $u=1,2$ можна навести в розгорнутому представленні:

$$S_{2,1}(p,t)=\frac{1}{48}\Big(-(1-x)^2p_{i-2}+(2-16x+10x^2)p_{i-1}+(46-18x^2)p_i+$$
$$+(2+16x+10x^2)p_{i+1}-(1+x)^2p_{i+2}\Big), \tag{1}$$

$$S_{2,2}(p,t)=\frac{1}{288}\Big((1-x)^2 p_{i-3}+\left(-4+20x-12x^2\right)p_{i-2}+$$
$$+\left(-5-106x+75x^2\right)p_{i-1}+\left(304-128x^2\right)p_i+\left(-5+106x+75x^2\right)p_{i+1}+$$
$$+\left(-4-20x-12x^2\right)p_{i+2}+(1+x)^2 p_{i+3}\Big), \tag{2}$$

$$S_{3,1}(p,t)=\frac{1}{1152}\Big(-5(1-x)^3 p_{i-2}+\left(-81-27x+117x^2-49x^3\right)p_{i-1}+$$
$$+\left(662-570x-102x^2+122x^3\right)p_i+\left(662+570x-102x^2-122x^3\right)p_{i+1}+$$
$$+\left(-81+27x+117x^2+49x^3\right)p_{i+2}-5(1+x)^3 p_{i+3}\Big). \tag{3}$$

На основі виразів (1)-(3) нескладно забезпечити зміну кількості відліків в послідовності $\{p_i\}_{i\in Z}$ в довільну кількість раз (необов'язково у цілочисельну). Але, якщо зміна масштабу послідовності здійснюється на певний наперед відомий коефіцієнт, то в цьому разі для апроксимацій, що мають явний вигляд як наведені вище, можна отримати обчислювальні процедури з меншою обчислювальною складністю, як часткові випадки (*subdivision*-процедури).

Введемо позначення

$$\gamma_{(x)}^{(r,k)}$$

– вектор стовпець координати якого після операції дискретної згортки з послідовністю відліків $\{p_i\}_{i\in Z}$, функції $p(t)$ надають лінійний функціонал $S_{r,k}^{(x)}$, що є частковим випадком сплайнів (1)-(4) в точці x, тобто:

$$S_{r,k}^{(x)}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\gamma_{(x)}^{(r,k)}{}_i\cdot p_i .$$

Нехай для визначеності x може набувати значення із множини

$$\left\{-1,-\frac{4}{5},-\frac{3}{4},-\frac{2}{3},-\frac{3}{5},-\frac{1}{2},-\frac{2}{5},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},1\right\}. \tag{4}$$

Тоді для сплайну $S_{2,1}(p,t)$ має місце :

$$S_{2,1}^{(x)}=\sum_{j=i-2}^{i+2}\gamma_{(x)}^{(2,1)}{}_{j-i}\cdot p_j ,$$

де

$$\gamma_{(-1)}^{(2,1)}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-1 & 7 & 7 & -1 & 0\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{4}{5})}^{(2,1)}=\frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-81 & 530 & 862 & -110 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{3}{4})}^{(2,1)}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-49 & 314 & 574 & -70 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(2,1)}=\frac{1}{432}\begin{pmatrix}-25 & 154 & 342 & -38 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{3}{5})}^{(2,1)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-16 & 95 & 247 & -25 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{1}{2})}^{(2,1)}=\frac{1}{192}\begin{pmatrix}-9 & 50 & 166 & -14 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{2}{5})}^{(2,1)}=\frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-49 & 250 & 1078 & -70 & -9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{1}{3})}^{(2,1)}=\frac{1}{108}\begin{pmatrix}-4 & 19 & 99 & -5 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(2,1)}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-25 & 106 & 718 & -22 & -9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(2,1)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-9 & 35 & 283 & -5 & -4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(0)}^{(2,1)}=\frac{1}{48}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 46 & 2 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix}-4 & -5 & 283 & 35 & -9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{768}\begin{pmatrix}-9 & -22 & 718 & 106 & -25\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{108}\begin{pmatrix}-1 & -5 & 99 & 19 & -4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-9 & -70 & 1078 & 250 & -49\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{192}\begin{pmatrix}-1 & -14 & 166 & 50 & -9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix}-1 & 25 & 247 & 95 & -16\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{432}\begin{pmatrix}-1 & -38 & 342 & 154 & -25\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{768}\begin{pmatrix}-1 & -70 & 574 & 314 & -49\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-1 & -110 & 862 & 530 & -81\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{(1)} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & -1 & 7 & 7 & -1\end{pmatrix}^T.$$

Для сплайну $S_{2,2}(p,t)$ виконється:

$$S_{2,2}^{(x)} = \sum_{j=i-3}^{i+3} \gamma^{(2,2)}_{(x)\ j-i} \cdot p_j ,$$

де

$$\gamma^{(2,2)}_{(-1)} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix}1 & -9 & 44 & 44 & -9 & 1 & 0\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{7200}\begin{pmatrix}81 & -692 & 3195 & 5552 & -1045 & 108 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4608}\begin{pmatrix}49 & -412 & 1867 & 3712 & -677 & 68 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2592}\begin{pmatrix}25 & -204 & 891 & 2224 & -381 & 36 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{1800}\begin{pmatrix}16 & -127 & 535 & 1612 & -260 & 23 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1152}\begin{pmatrix}9 & -68 & 267 & 1088 & -157 & 12 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{7200}\begin{pmatrix}49 & -348 & 1235 & 7088 & -885 & 52 & 9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{648}\begin{pmatrix}4 & -27 & 87 & 652 & -72 & 3 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4608}\begin{pmatrix}25 & -156 & 419 & 4736 & -429 & 4 & 9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{1800}\begin{pmatrix}9 & -53 & 120 & 1868 & -145 & -3 & 4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{(0)} = \frac{1}{288}\begin{pmatrix}1 & -4 & -5 & 304 & -5 & -4 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{1800}\begin{pmatrix}4 & -3 & -145 & 1868 & 120 & -53 & 9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4608}\begin{pmatrix}9 & 4 & -429 & 4736 & 419 & -156 & 25\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(2,2)}_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{648}\begin{pmatrix}1 & 3 & -72 & 652 & 87 & -27 & 4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(2,2)}=\frac{1}{7200}\begin{pmatrix}9 & 52 & -885 & 7088 & 1235 & -348 & 49\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(2,2)}=\frac{1}{1152}\begin{pmatrix}1 & 12 & -157 & 1088 & 267 & -68 & 9\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(2,2)}=\frac{1}{1800}\begin{pmatrix}1 & 23 & -260 & 1612 & 535 & -127 & 16\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(2,2)}=\frac{1}{2592}\begin{pmatrix}1 & 36 & -381 & 2224 & 891 & -204 & 25\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(2,2)}=\frac{1}{4608}\begin{pmatrix}1 & 68 & -677 & 3712 & 1867 & -412 & 49\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(2,2)}=\frac{1}{7200}\begin{pmatrix}1 & 108 & -1045 & 5552 & 3195 & -692 & 81\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{(1)}^{(2,2)}=\frac{1}{72}\begin{pmatrix}0 & 1 & -9 & 44 & 44 & 9 & 1\end{pmatrix}^{T}.$$

Для сплайну $S_{3,1}(p,t)$ буде:

$$S_{3,1}^{(x)}=\sum_{j=i-2}^{i+3}\gamma_{(x)}^{(3,1)}{}_{j-i}\cdot p_j\ ,$$

де

$$\gamma_{(-1)}^{(3,1)}=\frac{1}{144}\begin{pmatrix}-5 & 14 & 126 & 14 & -5 & 0\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-3645 & 5071 & 123782 & 25398 & -6601 & -5\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-1715 & 1647 & 62762 & 14630 & -3591 & -5\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{31104}\begin{pmatrix}-625 & 95 & 25934 & 7366 & -1661 & -5\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-320 & -189 & 14702 & 4838 & -1026 & -5\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{9216}\begin{pmatrix}-135 & -257 & 7250 & 2934 & -571 & -5\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-1715 & -6043 & 108234 & 53186 & -9527 & -135\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{3888}\begin{pmatrix}-40 & -193 & 2822 & 1570 & -266 & -5\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-625 & -4235 & 50958 & 32962 & -5197 & -135\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-135 & -1102 & 12046 & 8514 & -1283 & -40\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{(0)}^{(3,1)}=\frac{1}{1152}\begin{pmatrix}-5 & -81 & 662 & 662 & -81 & -5\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-40 & -1283 & 8514 & 12046 & -1102 & -135\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-135 & -5197 & 32962 & 50958 & -4235 & -625\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{3888}\begin{pmatrix}-5 & -266 & 1570 & 2822 & -193 & -40\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{5}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-135 & -9527 & 53186 & 108234 & -6043 & -1715\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{9216}\begin{pmatrix}-5 & -571 & 2934 & 7250 & -257 & -135\end{pmatrix}^{T};$$

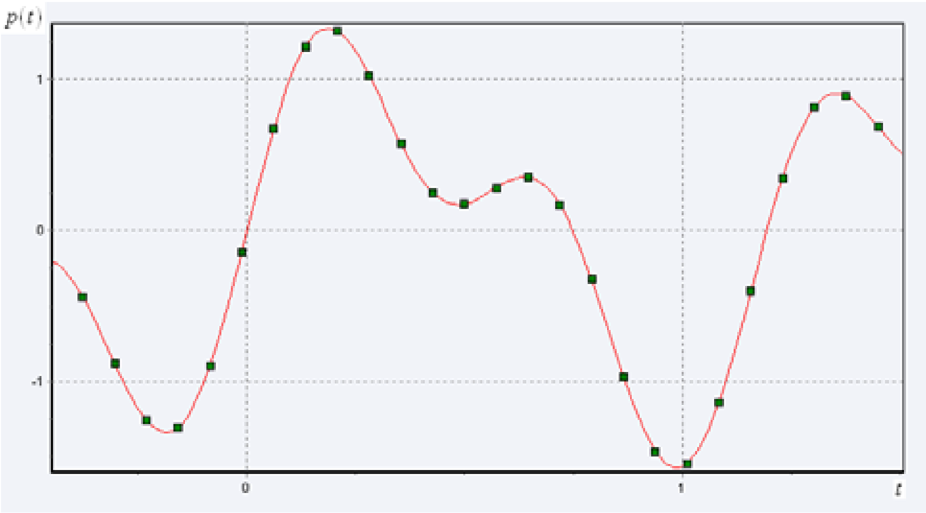
$$\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(3,1)}=\frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-5 & -1026 & 4838 & 14702 & -189 & -320\end{pmatrix}^{T};$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(3,1)} = \frac{1}{31104}\begin{pmatrix}-5 & -1661 & 7366 & 25934 & 95 & -625\end{pmatrix}^T;$$

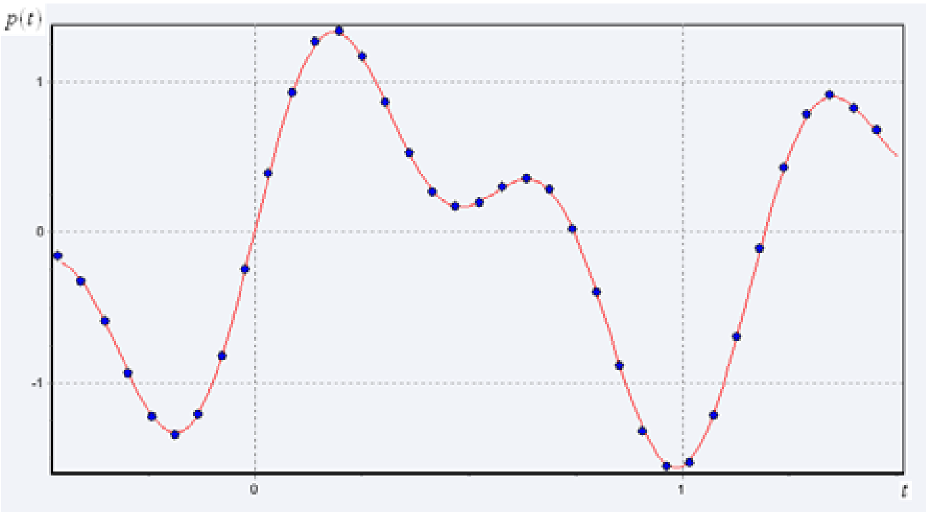
$$\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(3,1)} = \frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-5 & -3591 & 14630 & 62762 & 1647 & -1715\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(3,1)} = \frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-5 & -6601 & 25398 & 123782 & 5071 & -3645\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(1)}^{(3,1)} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix}0 & -5 & 14 & 126 & 14 & -5\end{pmatrix}^T.$$



а)



б)

Рис. 1. Небінарний *subdivision* «3 в 4» на основі сплайну (1):

а) функція $p(t) = \sin(5t) + 0{,}6\sin(11t)$, $t \in [-0{,}45;1{,}52]$ та її початкові відліки;

б) результат *subdivision* після однієї ітерації.

На графіках (рис. 1) подано приклад небінарного *subdivision* при проектуванні кожних 2-х послідовних відліків функції $p(t) = \sin(5t) + 0{,}6\sin(11t)$, $t \in [-0{,}45;1{,}52]$ (суцільна крива) в 3-и відліки. В якості лінійних операторів масштабування брались часткові випадки сплайну (1) відповідно в точках $x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = \frac{3}{4}$ з множини (5), котрим, відповідають маски $\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(2,1)}$, $\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)}$, $\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)}$,

$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{4}\right)}$. Як видно з графіків, при низькій обчислювальній складності, що надають часткові випадки сплайну (1), одержано наближення прийнятно високої якості апроксимації.

Висновки. В роботі отримано понад п'ятдесят часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів другого порядку першого та другого ступеня уточнення та третього порядку першого ступеня уточнення, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Нові лінійні оператори можуть мати використання при розробці програмного забезпечення опрацювання числових послідовностей, цифрових сигналів та зображень, що функціонує у режимі реального часу. Швидкодія розрахунків забезпечується низькою обчислювальною складністю запропонованих лінійних операторів.

Подальші дослідження можуть полягати в отриманні нових операторів обробки дво- та тривимірних послідовностей на основі наведених в роботі функціоналів.

Список використаних джерел:

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М. : Мир, 2001. 604 с.
2. Holschneider M. Wavelets. An analysis Tool. Oxford : Oxford University Press, 1995.
3. Andersson L.-E., Stewart N. Introduction to the mathematics of subdivision surfaces. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 356 p.
4. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и связь, 1985. 303 с.
5. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты. М. : Мир, 2001. 412 с.
6. Unser M. Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*. 1999. Vol. 16. № 6. P. 22–38.
7. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. К. : ІМ НАН України, 1996. 358 с.
8. Приставка П.О. Поліномаільні сплайни при обробці даних. Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. 236 с.
9. Приставка П.О. Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій* : зб. наук. праць. Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту. 2011. Т. 15. С. 4–17.
10. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка. Днепродзержинск : Днепродзержинский индустр. ин-т, 1989. 30 с.
11. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій*. 2003. Т. 7. С. 39–53.
12. Приставка П.О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів. *Вісн. НАУ*. 2008. № 3. С. 85–89.

References:

1. Rogers, D., Adams, J. (2001). *Matematicheskie osnovy mashinnoj grafiki [Mathematical foundations of computer graphics]*. Moscow: Mir [in Russian].
2. Holschneider, M. Wavelets (1995) *An analysis Tool*. Oxford: Oxford University Press.
3. Andersson, L.-E., Stewart, N. (2010). *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
4. De Bohr, K. (1985). *Prakticheskoe rukovodstvo po splajnam [A Practical Guide to Splines]*. Moscow: Radio and communication [in Russian].
5. Chuy, Ch. (2001). *Vvedenie v vehjvlety [An Introduction to Wavelets]*. Moscow: Mir [in Russian].
6. Unser, M. (1999). Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no 6, pp. 22–38.
7. Ligun, A.A., Shumeiko, A.A. (1996). *Asimptoticheskie metody vosstanovleniya krivykh [Asymptotic methods for restoring curves]*. Kyiv: IM of the NAS of Ukraine [in Russian].
8. Prystavka, P.O. (2004). *Polinomailni splainy pry obrobtsi danykh [Polynomial splines in data processing]*. Dnipro: Dnipropetrovsk University Publishing House [in Ukrainian].
9. Prystavka, P.O. (2011). Liniini kombinatsii V-splainiv, blyzki do interpoliatsiinykh u serednomu, v zadachi modeliuvannia analohovykh syhnaliv [Linear combinations of B-splines, close to interpolation on average, in the problem of modeling analog signals]. *Aktualni problemy avtomatyzatsii ta informatsiinykh tekhnolohii – Actual problems of automation and information technology*, vol. 15, pp. 4–17 [in Ukrainian].
10. Ligun, A.A., Karmazina, V.V. (1989). O vosstanovlenii ehmpiricheskoj funkcii plotnosti-raspredeleniya s pomoshchyu gistosplajnov vtorogo poryadka [Reconstruction of the empirical distribution density function using second-order histosplines]. Dneprodzerzhinsk: Dneprodzerzhinsk Industrial Institute in Russian].
11. Prystavka, P.O. (2003). Polinomialni splainy v zadachakh binarnoho popovnennia [Polynomial splines in binary improvement problems]. *Aktualni problemy avtomatyzatsii ta informatsiinykh tekhnolohii – Actual problems of automation and information technology*, vol. 7, pp. 39–53 [in Ukrainian].
12. Prystavka, P.O. (2008). Nebinarne popovnennia poslidovnostei vidlikiv hladkykh funktsii liniinymy operatoramy na osnovi polinomialnykh splainiv [Non-binary reimplementation of poslidities in smooth functions by line operators based on polynomial splines]. Visnyk NAU – Proceedings of the National Aviation University, no 3, pp. 85–89 [in Ukrainian].