УДК 519.6: 004.94
DOI https://doi.org/10.32689/maup.it.2023.1.10

Володимир ТИХОХОД
кандидат технічних наук, доцент кафедри цифрових технологій в енергетиці, навчально-науковий інститут атомної і теплової енергетики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, Київ, 03056 (v.tikhokhod@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-1525-4770

Лариса КУБЛІЙ
кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри цифрових технологій в енергетиці, навчально-науковий інститут атомної і теплової енергетики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, Київ, 03056 (kublii_l_i@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-1015-3209

Андрій ОНИСЬКО
кандидат військових наук, доцент, доцент кафедри цифрових технологій в енергетиці, навчально-наукового інституту атомної і теплової енергетики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, Київ, 03056 (oniskoandrij2020@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-7178-1471

Volodymyr TYKHOKHOD
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Digital Technologies in Energy, Heat Power Engineer Department, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, 03056, Ukraine (v.tikhokhod@gmail.com)

Larysa KUBLII
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Digital Technologies in Energy, Heat Power Engineer Department, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, 03056, Ukraine (kublii_l_i@ukr.net)

Andrii ONYSKO
Candidate of Military Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of of Digital Technologies in Energy, Heat Power Engineer Department, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, 03056, Ukraine (oniskoandrij2020@gmail.com)

Бібліографічний опис статті: Тихоход, В., Кублій, Л., Онисько, А. (2023). Дослідження багатозв'язних динамічних систем шляхом розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтера і роду методом колокацій. *Інформаційні технології та суспільство*. Вип. 1 (7). 73–79. DOI: https://doi.org/10.32689/maup.it.2023.1.10

Bibliographic description of the article: Tykhokhod, V., Kublii, L., Onysko, A. (2023). Doslidzhennia bahatozviaznykh dynamichnykh system shliakhom rozv'iazannia system intehralnykh rivnian Voltera i rodu metodom kolokatsii [Research of multiconnected dynamic system by solving of systems of Volterra integral equations of the first kind by the method of colocations]. *Informatsiini tekhnolohii ta suspilstvo – Information technology and society*, 1 (7), 73–79. DOI: https://doi.org/10.32689/maup.it.2023.1.10

ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ШЛЯХОМ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРА І РОДУ МЕТОДОМ КОЛОКАЦІЙ

Багатозв'язні динамічні системи характеризуються великою кількістю взаємопов'язаних вхідних та вихідних величин, що визначає складність їхнього математичного опису. Числове моделювання таких систем у вигляді систем інтегральних рівнянь Вольтера є ефективним підходом, проте вимагає реалізації операторів Вольтера. Їх особливістю є накопичення обчислень на кожному наступному кроці апроксимації. Як наслідок зменшення кроку апроксимації призводить до значного зростання кількості обчислювальних операцій. Це висуває особливі вимоги до простоти та швидкодії відповідних алгоритмів. В роботі досліджено ефективність застосування методу колокації на основі кусково-гладких поліномів до розв'язання такого класу рівнянь. Метод колокації заснований *на отриманні рішення на ділянках, довжина яких вибирається, і на кожному з них застосовується апроксимуючий вираз з невеликим числом координатних функцій. Великою перевагою алгоритмів на основі методу колокацій є велика гнучкість при виборі параметрів заміни функцій кусково-гладкими поліномами. Запропоновані алгоритми реалізовано в системі комп'ютерної математики MATLAB у вигляді функції slvie1colloc. Складові частини системи інтегральних рівнянь (ядра, праві частини) передаються аргументами програми у виді анонімних функцій або у табличному виді числових значень функцій в вузлах апроксимації. Додатковими аргументами є числові значення вузлів апромаксимаційної сітки, степені поліному та початкових умов інтегрального рівняння. Програма виконує перевірку вхідних даних, при некоректних значеннях виводиться код помилки та переривання роботи програми. Проведено апробацію комп'ютерної програми за допомогою обчислювальних експериментів. Описані результати продемонстрували ефективність запропонованих рішень. Абсолютна похибка обчислень для розглянутої моделі у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтера I роду з ядром загального виду при заданих параметрах не перевищила $3{,}5 * 10^{-3}$.*

Ключові слова: *інтегральні рівняння Вольтера, багатозв'язні динамічні системи, метод колокації.*

RESEARCH OF MULTICONNECTED DYNAMIC SYSTEM BY SOLVING OF SYSTEMS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND BY THE METHOD OF COLOCATIONS

Multiconnected dynamic systems are characterized by a large number of interconnected input and output values, which determines the complexity of their mathematical description. Modeling of such systems in the form of systems of Volterra integral equations is an effective approach, but requires the implementation of Volterra operators. Their feature is the accumulation of calculations at each next approximation step. As a result, the reduction of the approximation step leads to a significant increase in the number of computational operations. This puts special demands on the simplicity and speed of the corresponding algorithms. The efficiency of applying the collocation method based on piecewise smooth polynomials to the solution of this class of equations is studied. The collocation method is based on obtaining a solution on sections whose length is selected, and on each of them an approximating expression with a small number of coordinate functions is applied. A great advantage of algorithms based on the method of collocations is great flexibility in choosing parameters for replacing functions with piecewise smooth polynomials. The proposed algorithms are implemented in the MATLAB computer mathematics system in the function called slvie1colloc. The constituent parts of the system of integral equations (kernels, right-hand parts) are transmitted by program arguments in the form of anonymous functions or in the form of a table of numerical values of the functions in the approximation nodes. Additional arguments are the numerical values of the nodes of the approximation grid, the degree of the polynomial, and the initial conditions of the integral equation. The program checks the input data, in case of incorrect values, an error code is displayed and the program is interrupted. The computer program was tested using computational experiments. The described results demonstrated the effectiveness of the proposed solutions. The absolute error of calculations for the considered model in the form of a system of Volterra integral equations of the first kind with a kernel of the general form under the given parameters did not exceed $3{,}5 * 10^{-3}$.

Key words: *Voltaire's integral equations, multiconnected dynamical systems, collocation method.*

Постановка проблеми. Багатозв'язні динамічні системи (БДС) характеризуються великою кількістю взаємопов'язаних вхідних та вихідних величин, що визначає складність їхнього математичного опису.

Числове моделювання БДС у вигляді систем інтегральних рівнянь Вольтера (СІРВ) є ефективним підходом у цій задачі, проте вимагає реалізації операторів Вольтера. Їх особливістю є накопичення обчислень на кожному наступному кроці апроксимації. Як наслідок зменшення кроку апроксимації призводить до значного зростання кількості обчислювальних операцій. Це висуває особливі вимоги до простоти та швидкодії алгоритмів.

Напрямок досліджень застосування числових методів до розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтера розвинутий недостатньо і потребує розвитку, оскільки ці моделі мають свої особливості, що вимагають розробки специфічних алгоритмів та дослідження їх ефективності.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В існуючих публікаціях [1-2] висвітлено ряд методів дослідження інтегральних моделей Вольтера, але розглядаються інтегральні моделі Вольтера переважно у вигляді скалярних рівнянь. Застосування методу колокації до розв'язання скалярних інтегральних рівнянь досліджено в роботах [1-4]. Існує невелика кількість публікацій, що розглядають застосування числових методів до розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтера [5-9].

Мета дослідження. Розробка алгоритмів розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтера I роду на основі методу колокації з застосуванням кусково-гладких поліномів, реалізація програмних засобів дослідження багатозв'язних динамічних систем, що реалізують розроблені алгоритми. Аналіз ефективності застосування розроблених алгоритмів та програм.

Основний матеріал дослідження. Алгоритми на основі методу коллокації мають достатню простоту і швидкодію. Метод колокації заснований на отриманні рішення на ділянках, довжина яких вибирається, і на кожному з них застосовується апроксимуючий вираз з невеликим числом координатних функцій. Великою перевагою алгоритмів на основі методу колокацій є велика гнучкість при виборі параметрів заміни функцій кусково-гладкими поліномами. Застосування методу колокації до розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтера при моделюванні БДС потребує розробки відповідних алгоритмів, їх програмній реалізації та дослідження їх ефективності.

Метод колокації стосовно до систем інтегральних рівнянь Вольтера І роду. У роботі [1] розглянуто загальну схему методу колокації стосовно розв'язання рівнянь типу Вольтера І роду. Скористаємося цією схемою для розв'язання системи інтегральних рівнянь типу Вольтера І роду. У компактній формі система інтегральних рівнянь *n*-го порядку типу Вольтера І роду у загальному вигляді записується наступним чином

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{a}^{x}K_{ij}[x,s,y_j(s)]ds=f_i(x),\quad i=\overline{1,n},\quad x\in[a,b]. \tag{1}$$

Проміжок $[a,b]$ розбиваєм на *M* ділянок, на кожному з яких шукані розв'язки $y_i,\ i=\overline{1,n}$ представляються у вигляді функцій виду

$$\tilde{y}_i(x)=\Phi_i(x,C_{i,1},C_{i,2},\dots,C_{i,m}),\quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

що залежать від вільних параметрів.

Система рівнянь, що розв'язується, на кожній (*k*+1)–й ділянці $x_k\le x\le x_{k+1}, k=\overline{0,M-1}$ приймає наступний вид

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{x_k}^{x}K_{ij}[x,s,\tilde{y}_j(s)]ds=f_i(x)-\psi_{i,k}(x),\quad x\in[x_k,x_{k+1}],\quad i=\overline{1,n} \tag{3}$$

де

$$\psi_{i,k}(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_{a}^{x_k}K_{ij}[x,s,\tilde{y}_j(s)]ds,\ s\in[a,x_k],\ x\in[x_k,x_{k+1}], \tag{4}$$

що завжди може бути обчислений за відомим на проміжку $a\le x\le x_k$ наближеним розв'язком $\tilde{y}_i(x),\ i=\overline{1,n}$, що отриманий попередньо для *к*–1 ділянок. Початкові значення $\tilde{y}_i(x),\ i=\overline{1,n}$, шуканого розв'язку знаходяться яким-небудь допоміжним способом або вважаються заданими.

Для розв'язання рівнянь (3) використовується вираз (2), а вільні параметри $C_{i,r},\ i=\overline{1,n},\ r=\overline{1,m},$, визначаються з умов перетворення в нуль нев'язок

$$\varepsilon(C_{i,r},x_{k,v})=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k,j}}K[x_{k,v},s,\Phi_j(s,C_{j,1},C_{j,2},\dots,C_{j,m})]ds-f_i(x_{k,v})+\psi_{i,k}, \tag{5}$$

де $x_{k,v}$, *v*=1, 2, ..., *l* – вузли, що відповідають розбиттю відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ на *l* частин (підвідрізків). Вираз (5) представляє собою систему *m* рівнянь відносно $C_{i,1}, C_{i,2},\dots, C_{i,m}$.

Для зручності обчислень шуканий розв'язок на ділянці доцільно представляти у виді деякого поліному

$$\tilde{y}_i(x)=\sum_{j=1}^{m}C_{i,j}\phi_{i,j}(x),$$

де $\phi_{i,j}(x)$ – лінійно незалежні координатні функції.

Застосування кусково-гладких поліномів до розв'язання СІРВ І роду. Розглянемо варіант методу колокації з використанням кусково-гладких поліномів стосовно розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтера першого роду.

На проміжку інтегрування $[a, b]$ виділені вузли $x_{k,v}=(kl+v)h+a, v=\overline{0,l}, k=\overline{0,M-1}$, де індекс *k* відповідає (*k*+1)-ій ділянці (відрізку $x_k\le x\le x_{k+1}$), а індекс *j* – підвідрізку всередині ділянки; *l*≥1 – кількість підвідрізків; при цьому $x_{k,l}=x_{k+1,0}; x_{0,0}=a$.

Обчислення наближених значень функцій будемо шукати за допомогою кусково-гладких поліномів , що застосовуються на ділянках з поліномів виду

$$P_{i,k+1}(x)=P_{i,k}(x_{k,0})+\sum_{j=1}^{l}\frac{C_{i,k,j}}{j!}(x-x_{k,0})^j,k=0,1,\dots,M-1. \tag{6}$$

Вважаючи $P_i(x)\in C[a,b]$, отримаємо:

$$P_{i,k}(x_{k,0})=P_{i,k-1}(x_{k-1,l}).$$

Будемо вважати відомими значення $P_{i,0}(x_{0,0})=y_{i,0}$ ($y_{i,0}=y_i(a)$), *i*=1, 2, ..., *n*. Тоді на першій ділянці наближений розв'язок рівняння (1) приймає вигляд

$$P_{i,0}(x)=P_{i,0}(x_{0,0})+\sum_{j=1}^{l}\frac{C_{i,0,j}}{j!}(x-x_{0,0})^j. \tag{7}$$

Підставивши (7) в рівняння (1) для фіксованих значень , отримаємо систему

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{a}^{x_{0,v}}K_{ij}[x_{0,v},s,P_{i,0}(s)]=f_i(x_{0,v}),i=\overline{1,n},j=\overline{1,l}, \tag{8}$$

яка після обчислення інтегралів представляє собою систему в загальному випадку нелінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $C_{i,0,1},\dots,C_{i,0,m}$, знаходження яких дозволяє отримати $P_{i,0}(x)$.

Наближений розв'язок на другій ділянці знаходимо за формулою

$$P_{i,1}(x) = P_{i,1}(x_{1,0}) + \sum_{j=1}^{l} \frac{C_{i,1,j}}{j!}(x - x_{1,0})^j, \tag{9}$$

де значення $P_{i,1}(x_{1,0})$ відомі з обчислень на попередньому кроці:

Після підстановки (9) в систему рівнянь (3), отримуємо систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{1,0}}^{x_{1,1}} K_{ij}\left[x_{1,1}, s, P_{j,1}(s)\right] ds = f_i\left(x_{1,1}\right) - \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{x_{1,0}} K_{ij}\left[x_{1,1}, s, P_{j,0}(s)\right] ds\,,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{1,0}}^{x_{1,2}} K_{ij}\left[x_{1,2}, s, P_{j,1}(s)\right] ds = f_i\left(x_{1,2}\right) - \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{x_{1,0}} K_{ij}\left[x_{1,2}, s, P_{j,0}(s)\right] ds, \tag{10}$$

де $i = \overline{1,n}$, що дозволяє знайти значення $C_{i,k,1}, C_{i,k,2},\ldots,C_{i,k,m}$, $k = \overline{1, M-1}$, в загальному випадку використовується вираз

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{k,0}}^{x_{k,v}} K_{ij}\left[x_{k,v}, s, P_{j,k}(s)\right] = f_i\left(x_{k,v}\right) - \psi_{i,k}\left(x_{x,v}\right), \tag{11}$$

де

$$\psi_{i,k}\left(x_{k,v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{x_{1,0}} K_{ij}\left(x_{x,v}, s, P_{j,0}(s)\right) ds + \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{x_{1,0}} K_{ij}\left(x_{x,v}, s, P_{j,1}(s)\right) ds + \ +\ldots+ \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{k-1,0}}^{x_{k,0}} K_{ij}\left(x_{x,v}, s, P_{j,k-1}(s)\right) ds, k = \overline{1, M-1}, v = \overline{1,l}. \tag{12}$$

Для системи лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтера (СЛІРВ) ІІ роду

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{x} K_{ij}(x,s)\, y_j(s) ds = f_i(x), i = \overline{1,n} \tag{13}$$

обчислювальний вираз (11) приймає вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{k,0}}^{x_{k,v}} K_{rij}\left(x_{k,v}, s\right) P_{j,k}(s) ds = f_{r,i}\left(x_{k,v}\right) - \psi_{r,i,k}\left(x_{x,v}\right), \tag{14}$$

де

$$\psi_{r,i,k}\left(x_{k,v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{x_{1,0}} K_{rij}\left(x_{x,v}, s\right) P_{j,0}(s) ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{1,0}}^{x_{2,0}} K_{rij}\left(x_{x,v}, s\right) P_{j,1}(s) ds + \ldots +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{k-1,0}}^{x_{k,0}} K_{rij}\left(x_{x,v}, s\right) P_{j,k-1}(s) ds, k = \overline{1, M-1}, v = \overline{1,l}.$$

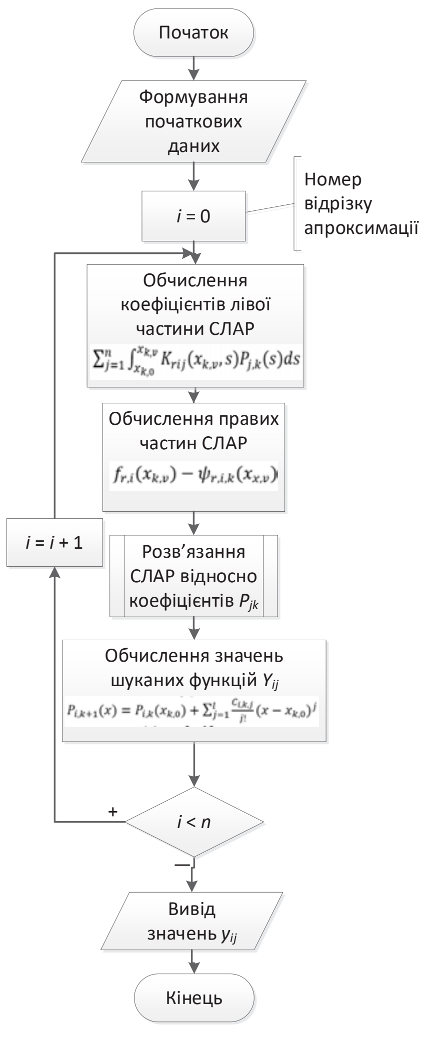

Рис. 1. Алгоритм розв'язання СЛІРВ І роду методом колокації з використанням кусково-гладких поліномів

Алгоритмічне та програмне забезпечення. На рис. 1 наведено алгоритм розв'язання СЛІРВ І роду методом колокації з використанням кусково-гладких поліномів.

Вхідними параметрами алгоритму є:

x – вузли апроксимаційної сітки,

mm – степінь полінома,

K – ядра інтегрального рівняння,

f – праві частини інтегрального рівняння,

*y*0 – початкові умови.

Реалізацію алгоритму виконано в системі комп'ютерної математики MATLAB у вигляді функції *slvie1colloc*.

Можливі інтерфейси програми *slvie1colloc*:

1. y=slvie1colloc(x, mm, K, f).
2. y=slvie1colloc(x, mm, K, f, y0).

Вхідними параметрами програми є:

x – вектор чисел, що задають вузли апроксимаційної сітки,

mm – число, що задає степінь полінома,

K – ядра інтегрального рівняння, що можуть бути задані в двох формах: а) двовимірний масив аналітичних виразів функцій у вигляді анонімних функцій MATLAB, що представляють ядра інтегрального рівняння, б) чотирьох-вимірний масив значень ядер інтегрального рівняння у вузлах x_i апроксимаційної сітки;

f – праві частини інтегрального рівняння, що можуть бути задані в двох формах: а) вектору аналітичних виразів функцій у вигляді анонімних функцій MATLAB, б) двовимірного масиву, що містить числові значення функцій f_i у вузлах x_i.

$y0$ (опціонально) – вектор чисел, що задають значення початкових умов (за замовчанням вектор містить нулі).

Програма виконує перевірку вхідних даних. При некоректних значеннях виводиться помилка з кодом та робота програми припиняється. Можливі коди помилок зображені в таблиці 1.

Таблиця 1

Коди помилок в програмі *slvie1colloc*

Код помилки	Умова	Повідомлення
1	Перевіряється, чи вихідний параметр x є вектором, використовуючи вбудовану функцію isvector системи MATLAB	x повинен бути вектором
2	Перевіряється, чи вихідний параметр $y0$ є вектором, використовуючи вбудовану функцію isvector системи MATLAB	$y0$ повинен бути вектором
3	Порівнюється розмірність масиву K за виміром 1 та виміром 2 з допомогою виразу: size(K,1)~=size(K,2), де size – функція MATLAB, що повертає розмірність масиву за заданим виміром.	K повинна бути квадратною матрицею
4	Порівнюється розмірність масивів K та F за першим виміром: size(K,1)~=size(F,1)	Вимірність масиву K повинна співпадати з довжиною вектору f
5	Порівнюється розмірність масивів $y0$ та F за першим виміром: size(y0,1)~=size(F,1)	Вимірність масиву $y0$ повинна співпадати з довжиною вектору f

В результаті виконання програми повертається масив y чисел, що є значеннями шуканих функцій y_r. Масив має розмірність $[m, n]$ де m – розмірність системи інтегральних рівнянь (кількість невідомих функцій), n – довжина вектору x (кількість вузлів апроксимаційної сітки).

Обчислювальний експеримент. Розглянемо систему лінійних інтегральних рівнянь Вольтера I роду:

$$\begin{cases} \int_0^x (x-s)\,y_1(s)\,ds + \int_0^x (x+s)\,y_2(s)\,ds = \\ \qquad (2x-1)\sin x + \cos x + x - 1; \\ \int_0^x (x-2s)\,y_1(s)\,ds + \int_0^x (2x-s)\,y_2(s)\,ds = \\ \qquad (x-1)\cos x + (x-2)\sin x + x + 1; \end{cases} \tag{13}$$

з точним розв’язком

$$y_1^T(x) = \sin x,\; y_2^T(x) = \cos x. \tag{14}$$

Визначимо наступні вхідні дані: [0, 4π] – інтервал інтегрування, 40 – кількість підвідрізків, 2 – степінь поліному. Графіки точного та обчисленого розв’язків системи показані на рисунках 2, 3. Похибки обчислень зображено на рисунках 4, 5.

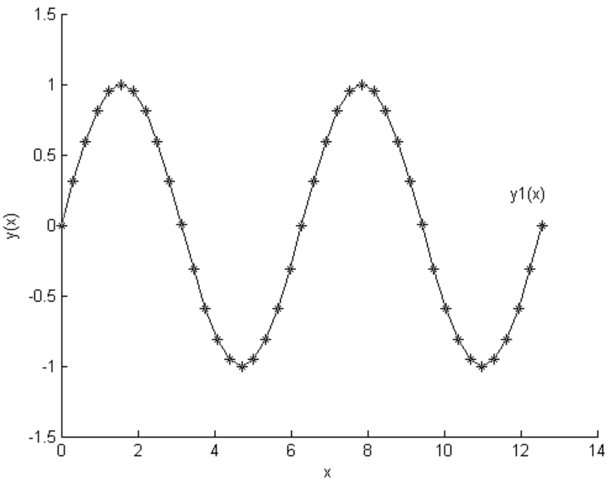

Рис. 2. Графіки точного (–) та обчисленого (*) розв’язків рівняння (13) методом колокації за формулами (11)–(12) (функція 1)

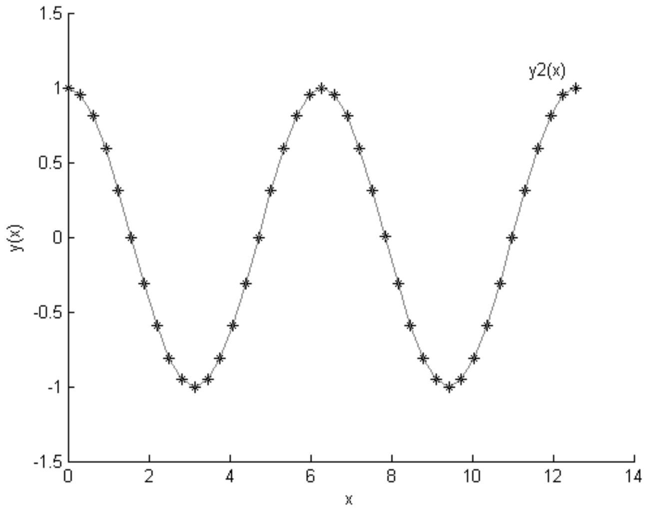

Рис. 3. Графіки точного (–) та обчисленого (*) розв'язків рівняння (13) методом колокації за формулами (11)–(12) (функція 2)

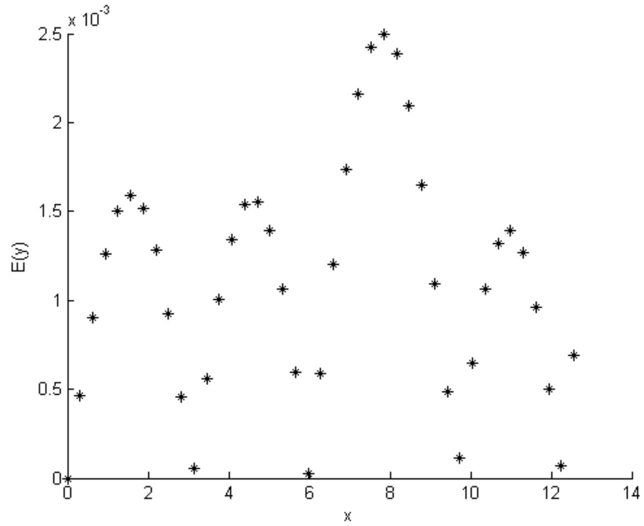

Рис. 4. Абсолютна похибка розв'язання системи (13) за формулою (11) (функція 1)

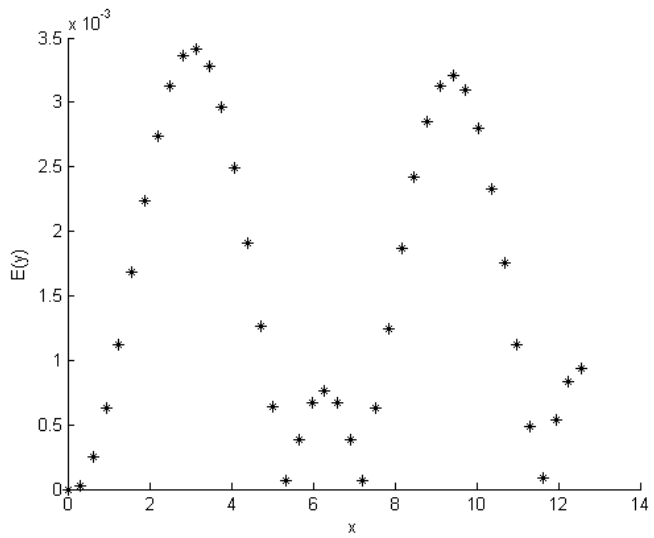

Рис. 5. Абсолютна похибка розв'язання системи (13) за формулою (11) (функція 2)

Висновки. Розглянуто застосування методу колокації до розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтера I роду. Даний тип моделей може бути ефективно використано при дослідженні багатозв'язних динамічних систем. Запропонований алгоритм та його програмна реалізація в системі MATLAB для наближеного числового розв'язання використовує кусково-гладкі поліноми. Проведений обчислювальний експеримент продемонстрував дієвість запропонованих рішень. Абсолютна похибка обчислень для розглянутої моделі у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтера I роду з ядром загального виду при заданих параметрах на перевищила $3{,}5 * 10^{-3}$.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Київ: Наукова думка, 1986. 544 с.
2. Hermann Brunner. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. Cambridge University Press, 2004. 597 p.
3. Верлань А.А., Волощенко А.Б., Сагатов М.В. Коллокационный алгоритм решения уравнения Вольтерры I рода. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ*. Вип. 13. Київ: 2001. С. 97–100.
4. Понеділок В.В., Грищук В.А. Розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри методом колокацій. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доповідей 9-ї Міжнародної наукової конференції. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2020. 136 с.
5. Дячук О.А., Костьян Н.Л. Коллокационные алгоритмы решения уравнений Вольтерры. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*, 2008. Випуск 17. 49-62
6. Armand A., Gouyandeh Z. Numerical solution of the system of Volterra integral equations of the first kind. *Int. J. Industrial Mathematics*. Vol. 6, No. 1, 2014. DOI:10.35629/5252-0501801807.
7. Padmanabha A. Reddy, Manjula S. H., Sateesha3 C. Haar wavelet method for solving the system of linear Volterra integral equations with variable coefficients. *Malaya Journal of Matematik*. 2021. Vol. 9, No. 1, P. 1-8. DOI: 10.26637/MJM0901/0001
8. Fawziah M. Al-Saar, Ahmed A. Hamoud, Kirtiwant P. Ghadle. Some Numerical Methods to Solve a System of Volterra Integral Equations. *Int. J. Open Problems Compt. Math.* 2019. Vol. 12, No. 4. P. 22-35.
9. Biazar J., Babolian E., Islam R. Solution of a system of Volterra integral equations of the first kind by Adomian method. *Applied Mathematics and Computation.* 2004. Vol. 147(3). P. 713-719. DOI:10.1016/S0096-3003(02)00806-8.
10. Biazar J., Babolian E., Islam R. Solution of a system of Volterra integral equations of the first kind by Adomian method. *Applied Mathematics and Computation*. 2003. Vol. 139. Issues 2–3. P. 249–258. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00173-X.

References:

1. Verlan A.F., Sizikov V.S. (1986) *Intehralnye uravnenyia: metody, alhoritmy, prohramy [Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs].* Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
2. Hermann Brunner. (2004). Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. Cambridge University Press.
3. Verlan A.A., Voloshchenko A.B., Sahatov M.V. (2001). Kollokatsyonnyi alhoritm reshenija uravnenija Volterry I roda [Collocation algorithm for solving the Volterra equation of first kind]. *Collection of scientific works of G.E. Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering*. (Vol. 13). (pp. 97–100). Kyiv. [in Ukrainian].
4. Ponedilok V.V., Hryshchuk V.A. (2020). Rozv'iazuvannia neliniinykh intehralnykh rivnian Volterry metodom kolokatsii [Solving nonlinear integral equations of Volterra by the method of collocations]. *IX Mizhnarodna naukovoi konferentsii "Suchasni problemy matematychnoho modeliuvannia, prohnozuvannia ta optymizatsii" — IX International Scientific Conference "Modern Problems of Mathematical Modeling, Forecasting and Optimization"*. Kamianets-Podilskyi. [in Ukrainian].
5. Dyachuk O.A., Kostyan N.L. (2008). Kollokacionnye algoritmy resheniya uravnenij Volterry [Collocation algorithms for solving the Volterra equations]. *Mathematical and computer modeling. Series: Technical sciences — Mathematical and computer modeling. Series: Technical sciences*. (Vol. 17). (pp. 49-62).
6. Armand A., Gouyandeh Z. (2014). Numerical solution of the system of Volterra integral equations of the first kind. *Int. J. Industrial Mathematics*. (Vol. 6). (No. 1). DOI:10.35629/5252-0501801807.
7. Padmanabha A. Reddy, Manjula S. H., Sateesha3 C. Haar wavelet method for solving the system of linear Volterra integral equations with variable coefficients. *Malaya Journal of Matematik*. 2021. Vol. 9, No. 1, P. 1-8. DOI: 10.26637/MJM0901/0001
8. Fawziah M. Al-Saar, Ahmed A. Hamoud, Kirtiwant P. Ghadle. Some Numerical Methods to Solve a System of Volterra Integral Equations. *Int. J. Open Problems Compt. Math.* 2019. Vol. 12, No. 4. P. 22-35.
9. Biazar J., Babolian E., Islam R. Solution of a system of Volterra integral equations of the first kind by Adomian method. *Applied Mathematics and Computation.* 2004. Vol. 147(3). P. 713-719. DOI:10.1016/S0096-3003(02)00806-8.
10. Biazar J., Babolian E., Islam R. Solution of a system of Volterra integral equations of the first kind by Adomian method. *Applied Mathematics and Computation*. 2003. Vol. 139. Issues 2–3. P. 249–258. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00173-X.